الرياضيات

الصف الحادي عشر- الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأول

11

إجابات الطالب

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

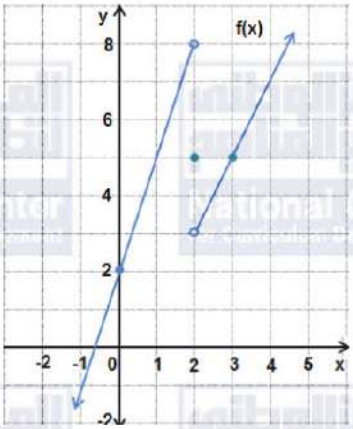
06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب الطالب الصف الأول الثانوي العلمي ف1

الوحدة الأولى: الاقترانات المتشعبة والمتباينات

الدرس الأول: الاقترانات المتشعبة

مسألة اليوم صفحة 8	
	$18 \times 0.361 + 18 \times 0.45 + 6 \times 0.55 = 17.898\ JD$
أتحقق من فهمي صفحة 10	
a	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.
b	$f(5) = 2(5) - 1 = 9$ $f(2) = 5$
c	 مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.
أتحقق من فهمي صفحة 11	
	$f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}, & 1 \le x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$
أتحقق من فهمي صفحة 12	
	$f(x) = \begin{cases} 1.2x, & x < 400 \\ 1.1x, & 400 \le x < 600 \\ x + 50, & x \ge 600 \end{cases}$

أتحقق من فهمي صفحة 14

a

$$f(x)=\begin{cases}-5x+15, & x<3\\ 5x-15, & x\geq 3\end{cases}$$

b

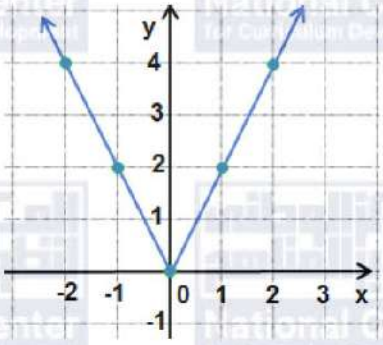
$$f(x)=\begin{cases}x^2-5x+6, & x\leq 2\\ -x^2+5x-6, & 2<x<3\\ x^2-5x+6, & x\geq 3\end{cases}$$

أتحقق من فهمي صفحة 16

a

المجال مجموعة الأعداد الحقيقية كلها،

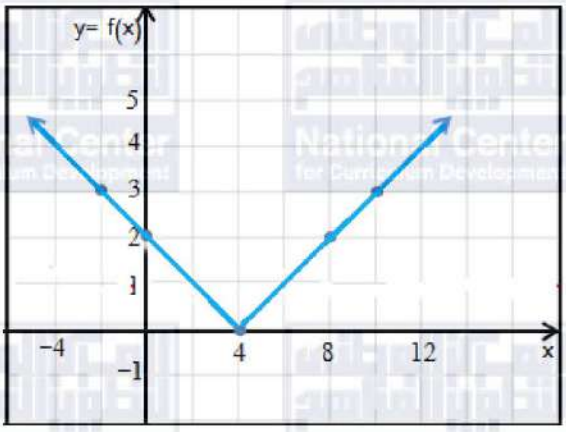
المدى هو $[0, \infty)$.



b

المجال مجموعة الأعداد الحقيقية كلها،

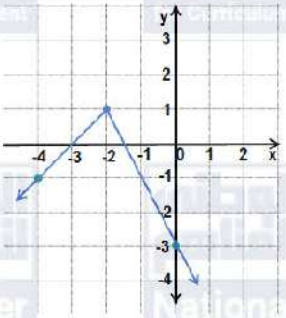
المدى هو $[0, \infty)$.

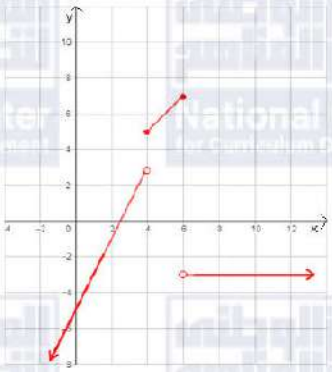
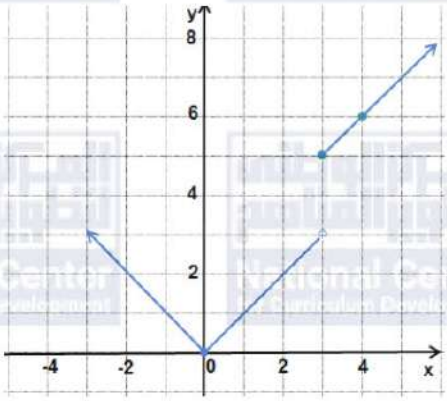
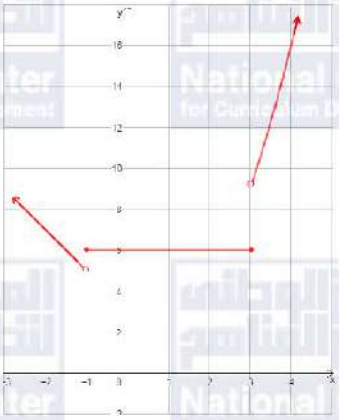


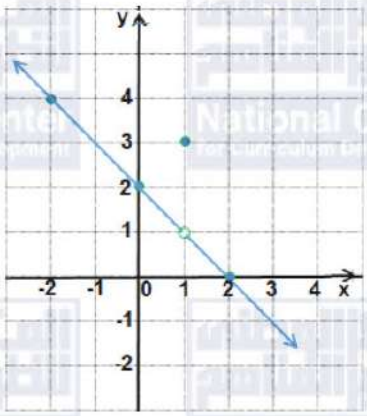
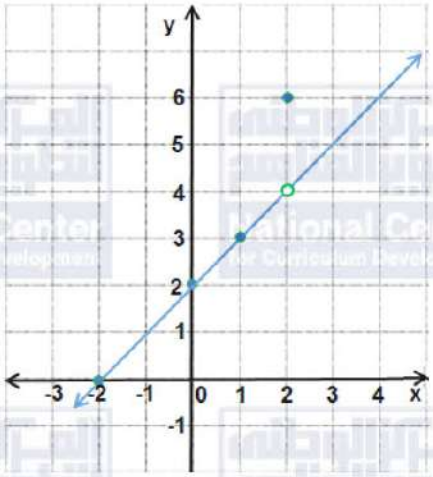
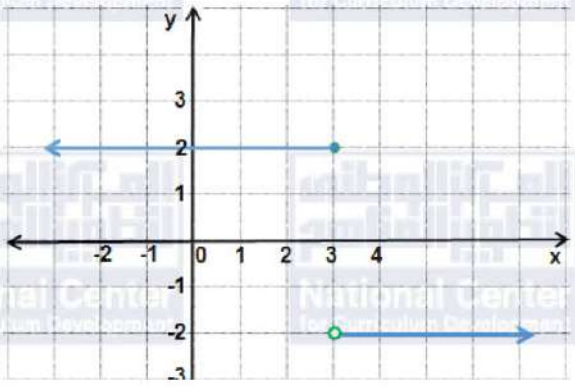
أتحقق من فهمي صفحة 18

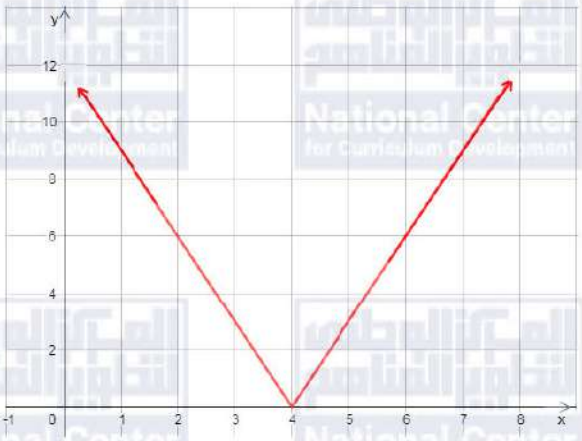
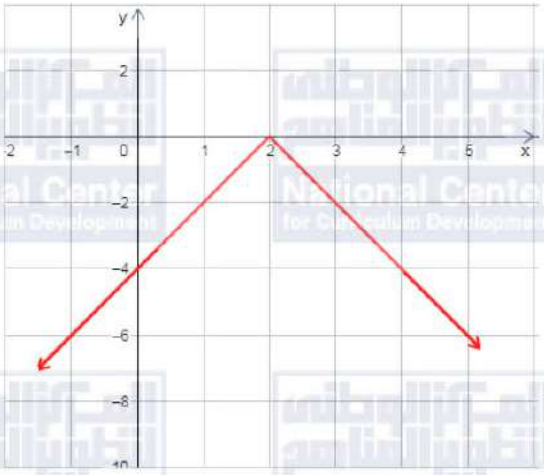
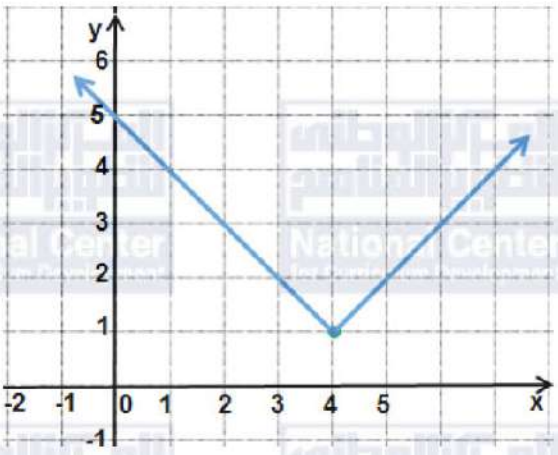
$$f(x)=\left|\frac{4}{3}x+4\right|$$

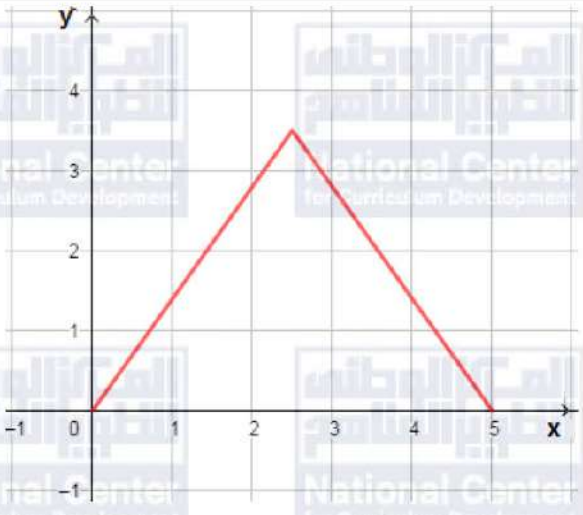
أتدرب وأحل المسائل صفحة 18

1	12
2	-7
3	-3
4	13
5	2
6	2
7	$f(x)=\begin{cases}-3x+6, & x<2\\ 3x-6, & x\geq 2\end{cases}$
8	$f(x)=\begin{cases}x^2+9x+8, & x<-8\\ -x^2-9x-8, & -8\leq x\leq -1\\ x^2+9x+8, & x>-1\end{cases}$
9	$f(x)=\begin{cases}-7x+8, & x<\frac{5}{7}\\ 7x-2, & x\geq\frac{5}{7}\end{cases}$
10	$f(x)=\begin{cases}5x^2+13x-8, & x<-8\\ -5x^2-13x+4, & -8\leq x\leq -1\\ 5x^2+13x-8, & x>-1\end{cases}$
11	 المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $(-\infty, 1]$.

12	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $(-\infty, 3) \cup [5, 7]$ 
13	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $[0, \infty)$. 
14	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $(5, \infty)$. 

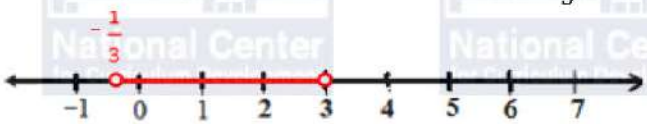
15	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء1 أو $(-\infty, 1)\cup(1, \infty)$ 
16	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء4 أو $(-\infty, 4)\cup(4, \infty)$ 
17	المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى {2 , 2-} 

18	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $[0, \infty)$. 
19	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $(-\infty, 0]$. 
20	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $[1, \infty)$. 

21	$f(x)=\begin{cases}-2, & x\le -2\\ x, & -2<x<2\\ 2, & x\ge 2\end{cases}$
22	$f(x)=\begin{cases}1, & -4\le x\le -1\\ -x+1, & -1<x\le 2\\ -2, & 2<x\le 5\end{cases}$
23	$f(x)=\begin{cases}-x+2, & x\ne 1\\ 3, & x=1\end{cases}$
24	$f(x)=\lvert x\rvert-2$
25	$f(x)=-\lvert 3x\rvert$
26	$f(x)=-\frac{1}{3}\lvert x-2\rvert+6$
27	$f(x)=\begin{cases}0.361x, & 0\le x\le 18\\ 0.450x-1.602, & 18<x\le 36\\ 0.550x-5.202, & 36<x\le 54\\ x-29.502, & 54<x\le 72\\ 1.2x-43.902, & x>72\end{cases}$
28	
29	مجال هذا الاقتران هو [0, 5]، ومداه [0, 3.5]

30	$f(x) = \begin{cases} 500 + 0.01x, & x \leq 20000 \\ 200 + 0.015x, & x > 20000 \end{cases}$
31	
32	استمر الهطل ساعتان لأنه توقف بعد ساعتين، يقطع المنحنى المحور الأفقي عند 0، وَ 2
33	كان أعلى معدل هطل بعد ساعة من بدئه، يبين الرسم أن القيمة العظمى عند(1, 0.5)
34	a، لأن الرأس عند (2.5, 0)، ومفتوح للأعلى
35	لا تشكل افترانًا بسبب تداخل المجالين الجزئيين، فالفترة [1, 2] تقع في كل من (-∞, 2] وَ[1, ∞) فسيكون للعدد 1 مثلًا صورتان هما 2- وَ 1 وهذا يناقض تعريف الاقتران.
36	$f(x) = \|x^2 - 4\|$ لأن الرسم هو لقطع مكافئ يقطع المحور x عند 2-، وَ2، وعُكس الجزء الواقع تحت المحورx حول المحورx .
37	إجابة محتملة: $f(x) = \|x + 2\| - 11$
38	$p = -5 , q = -6$
39	إحداثيا نقطتي تقاطع منحنى f(x) مع المحورx هما(2, 0), (3, 0)

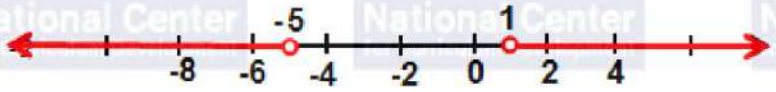
الدرس الثاني: حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

مسألة اليوم صفحة 21	
	$\|x-5\| = 0.02$
أتحقق من فهمي صفحة 23	
a	$x = -3,\ x = -1$
b	$x = 3$
c	$x = 3.25,\ \ x = 3.75$
أتحقق من فهمي صفحة 24	
	$x = 0,\ \ \ x = 4$
أتحقق من فهمي صفحة 25	
	$\|x - 300^\circ\| = 25^\circ$ $x = 325^\circ, x = 275^\circ$
أتحقق من فهمي صفحة 26	
a	$-\frac{1}{3} < x < 3$ مجموعة الحل: الفترة $(-\frac{1}{3}, 3)$ 
b	$1 \le x \le 3$ مجموعة الحل: الفترة $[1, 3]$
c	ليس لهذه المتباينة حل لأن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي أكبر من صفر أو تساويه.
أتحقق من فهمي صفحة 28	

a

$x < -5$ or $x > 1$

مجموعة الحل: $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$



b

$-2|3x+4| < -8$

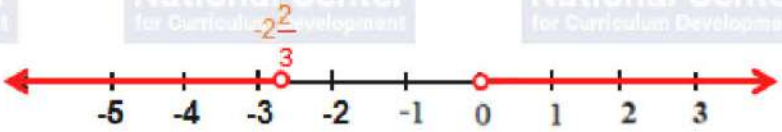
$|3x+4| > 4$ (بقسمة الطرفين على -2)

$3x + 4 < -4$ or $3x + 4 > 4$

$x < \frac{-8}{3}$ or $x > 0$

$x < -2\frac{2}{3}$ or $x > 0$

مجموعة الحل: $(-\infty, -2\frac{2}{3}) \cup (0, \infty)$



أتحقق من فهمي صفحة 31

a

$x < -3$ or $x > -1$

مجموعة الحل: $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$

b

$x \leq -5$ or $x \geq -\frac{1}{7}$

مجموعة الحل : الفترة $(-\infty, -5] \cup [-\frac{1}{7}, \infty)$

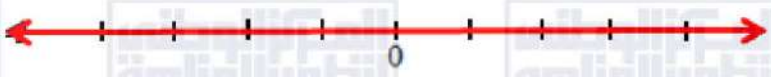
أتحقق من فهمي صفحة 31

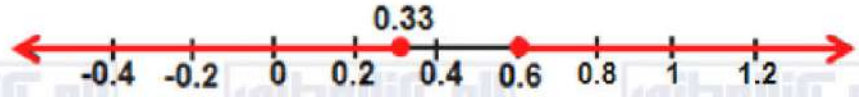
$|x-88| > 38$

$x < 50$ mg or $x > 126$ mg

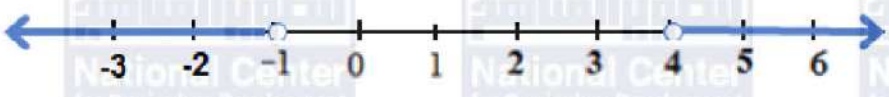
أتدرب وأحل المسائل صفحة 32

1	$\frac{2}{3}, 2$
2	-10, 18
3	0, 3
4	-0.4, 0.8
5	0
6	3.5, 5
7	-4, 0
8	$\left\|\frac{3x+3}{2x-5}\right\| - 4 = 6$ $\left\|\frac{3x+3}{2x-5}\right\| = 10$ $\frac{3x+3}{2x-5} = 10$ or $\frac{3x+3}{2x-5} = -10$ $3x+3 = 20x-50$ or $3x+3 = -20x+50$ $x = \frac{53}{17}$ or $x = \frac{47}{23}$
9	-4
10	$-5.5 < x < -0.5$ مجموعة الحل : الفترة (-5.5, -0.5)

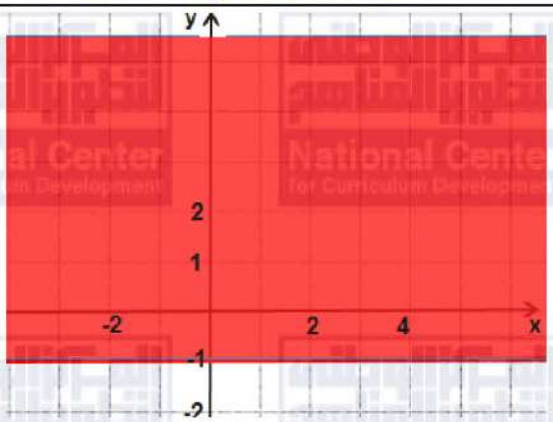
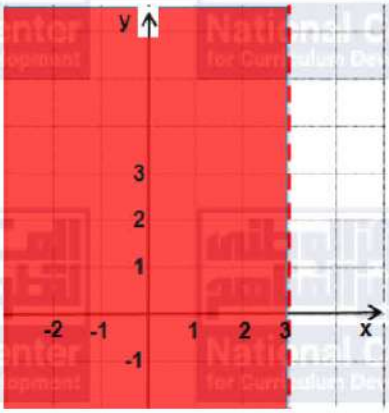
11	$x < -0.25$ or $x > 1.75$ مجموعة الحل: $(-\infty, -0.25) \cup (1.75, \infty)$
12	$\frac{-8}{3} \le x \le 2$ مجموعة الحل: الفترة $[\frac{-8}{3}, 2]$
13	$x \le -4.5$ or $x \ge 7.5$ مجموعة الحل: $(-\infty, -4.5] \cup [7.5, \infty)$
14	مجموعة الحل هي مجموعة الأعداد الحقيقية لأن القيمة المطلقة لأي مقدار هي أكبر من صفر ومن جميع الأعداد السالبة دائمًا. 
15	ليس لها حل، مجموعة حلها هي ϕ
16	$\lvert -4x - 6 \rvert < 14$ $-14 < -4x - 6 < 14$ $-8 < -4x < 20$ $2 > x > -5$ $-5 < x < 2$ مجموعة الحل:الفترة $(-5, 2)$

17	$-0.25 < x < 1.25$ مجموعة الحل:الفترة $(-0.25, 1.25)$
18	$x \leq -0.17$ or $x \geq 1.5$ مجموعة الحل: $(-\infty, -0.17] \cup [1.5, \infty)$
19	$x \leq 0.33$ or $x \geq 0.6$ مجموعة الحل: $(-\infty, 0.33] \cup [0.6, \infty)$ 
20	$x < -2$ or $x < -4$ عند تمثيل الحلين على خط الأعداد تلاحظ أنها متداخلان، ويكون اتحاد الحلين هو المجموعة الأوسع وهي $x < -2$ أي أن حل هذه المتباينة هو $(-\infty, -2)$
21	$x < 3$ or $x > \frac{11}{3}$ مجموعة الحل: $(-\infty, 3) \cup (\frac{11}{3}, \infty)$
22	$-4 \leq x \leq -2$ مجوعة الحل هي الفترة : $[-4, -2]$
23	$x < 0.5$ مجوعة الحل هي الفترة : $(-\infty, 0.5)$

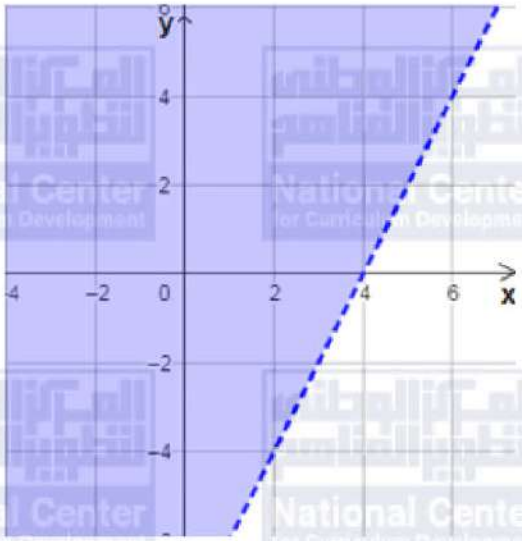
24	$x< -5$ or $x> -\frac{1}{3}$ مجموعة الحل هي : $(-\infty, -5) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$
25	$x < -\frac{2}{7}$ or $x > \frac{4}{3}$ مجموعة الحل هي: $(-\infty, -\frac{2}{7}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$
26	$-3.5 < x < 0.75$ مجموعة الحل هي الفترة : $(-3.5, 0.75)$
27	$\frac{5}{3} \leq x \leq 9$ مجموعة الحل هي: $[\frac{5}{3}, 9]$
28	إذا كان $c > 0$ فإن للمعادلة $\|ax+b\| = c$ حلان، وإذا كان $c = 0$ فلها حل واحد، وإذا كان $c < 0$ فليس لها حل لأن القيمة المطلقة لا تكون سالبة أبدًا.
29	إذا كانت درجة الحرارة هي x، فإن قيم x المقبولة هي المظللة بالأزرق، وقيم x التي لا تعيش فيها الأفاعي مظللة بالأحمر. لإيجاد المتباينة التي حلها هو الجزء المظلل بالأحمر أجد منتصف الفترة المظللة بالأزرق. متوسط 75°، و90° هو 82.5°، فالدرجات التي لا تعيش فيها الأفاعي هي التي تزيد عن 82.5° أو تقل عنها بأكثر من 7.5°، كما يظهر في الرسم. المتباينة التي تصف ذلك هي: $\|x- 82.5°\| > 7.5°$
30	إذا توقف الطالب عن القراءة عند الصفحة x فإن المعادلة هي: $\|x-304\| = 10$ ولها الحلان $x = 294, x = 314$ يمكن أن يتوقف الطلبة عن القراءة عند أي صفحة من 294 إلى 314

31	ليكن إيجار الشقة x دينار، تكون المتباينة التي تصف حدود الإيجار هي: $\|x- 250\| \leq 55$ وحلها هو: $195 \leq x \leq 305$ مدى إيجار شقة في هذا الحي هو من 195 دينار إلى 305 دنانير
32	لتكن كتلة القدم المكعب من الرخام x رطل، فتكون كتلة 20 قدم مكعب 20x رطل المتباينة التي تصف المسألة هي: $\|20x-3400\| \leq 100$ وحلها هو: $165 \leq x \leq 175$ كتلة القدم المكعب من الرخام تتراوح ما بين 165 رطل إلى175 رطل.
33	إذا كان طول المسمار x، فإن المعادلة هي: $\|x-5\| = 0.02$ ولها الحلان: $x = 4.98, x = 5.02$ الحد الأعلى لطول المسمار التي تنتجه هذه الآلة هو 5.02 cm، والحد الأدنى هو4.98 cm
34	إجابة محتملة: $\|x+1\| \geq 2$
35	إجابة محتملة: $\|x-1\| < 5$
36	كلا، ليس لهما الحل نفسه. حلا المعادلة $\|x+a\| = b$ هما $b- a, -b -a$ بينما حلا المعادلة $\|x\| + a = b$ هما $a - b , b-a$، فهما تشتركان في أحد الحلين b-a، وتختلفان في الآخر.
37	المتباينة المختلفة هي $\|4x+1\| - 5 \geq -3$ التي تتحول إلى $\|4x + 1\| \leq 8$، وبذلك تكون مجموعة حلها هي R مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة، بينما بقية المتباينات حلولها مجموعات جزئية من R.
38	إجابة مريم غير صحيحة، فالتمثيل المعطى هو للمتباينتين $x > 4$، أو $x > -1$ بينما حل المتباينة المعطاة هو $x < -1$ or $x > 4$، ويكون تمثيله على خط الأعداد على النحو الآتي: 

الدرس الثالث: حل نظام مكون من متباينات خطية بمتغيرين بيانيا

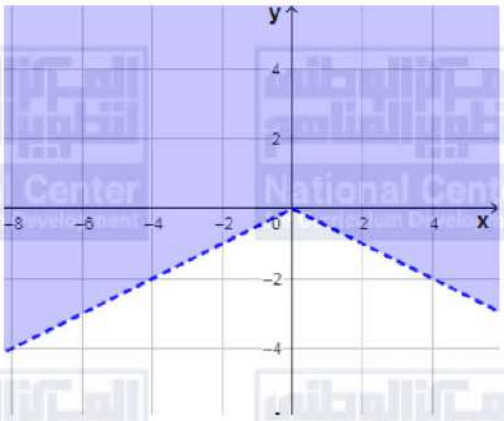
مسألة اليوم صفحة 34	
	$8x + 6y \geq 264$ $x = 18 \Rightarrow y \geq \frac{264 - 18 \times 8}{6} \Rightarrow y \geq 20$
أتحقق من فهمي صفحة 37	
a	
b	
c	

d

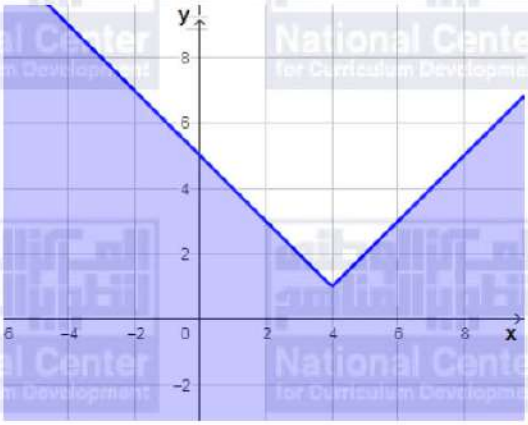


أتحقق من فهمي صفحة 38

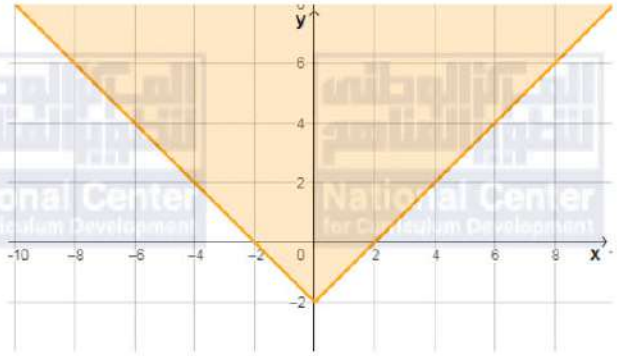
a



b

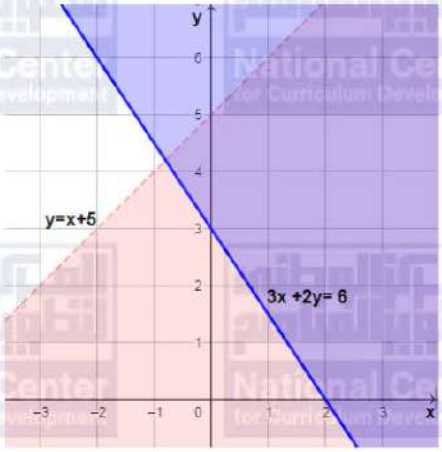


c

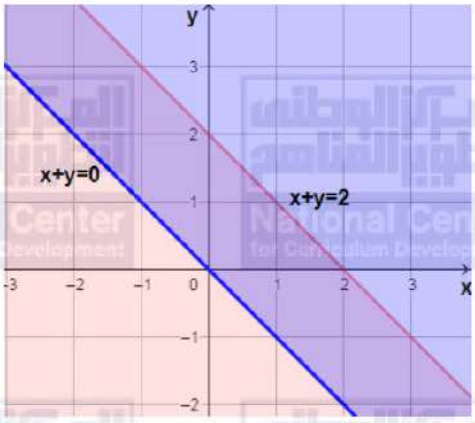


أتحقق من فهمي صفحة 40

a

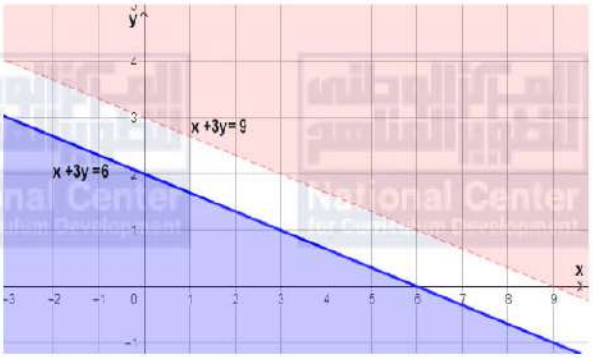


b

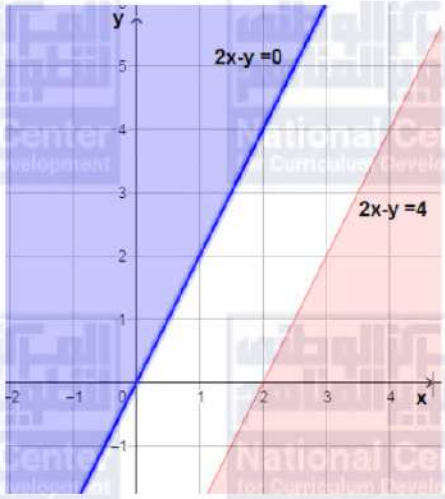


أتحقق من فهمي صفحة 40

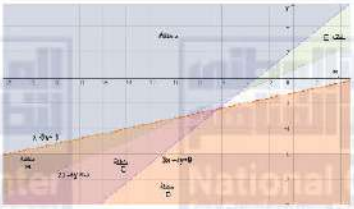
a



b



أتحقق من فهمي صفحة 41

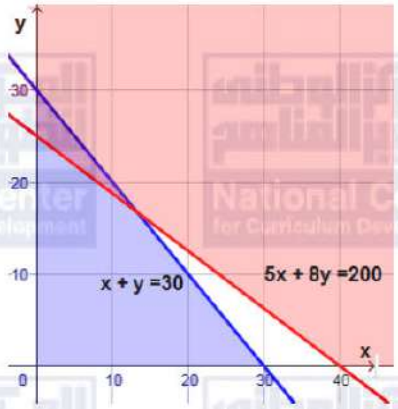


- حل المتباينة $-3x + 4y \geq 9$ هو المناطق A, B, C
- حل المتباينة $x - 5y > 6$ هو المناطق B, C, D
- حل المتباينة $2x - 5y < -3$ هو المناطق A, B, E

المنطقة المشتركة بين جميع الحلول هي المنطقة B

إذن، منطقة حل هذا النظام هي المنطقة B.

أتحقق من فهمي صفحة 43



أفرض أن كمية الكتان $x\ m^2$، وكمية الصوف $y\ m^2$، فيكون نظام المتباينات الذي يصف هذه المسألة هو:

$$x+ y \leq 30$$

$$5x+ 8y \geq 200$$

$$x \geq 0\ ,\ y \geq 0$$

ومنطقة حله ممثلة بالرسم المجاور بالمثلث الذي يتمازج فيه اللونين.

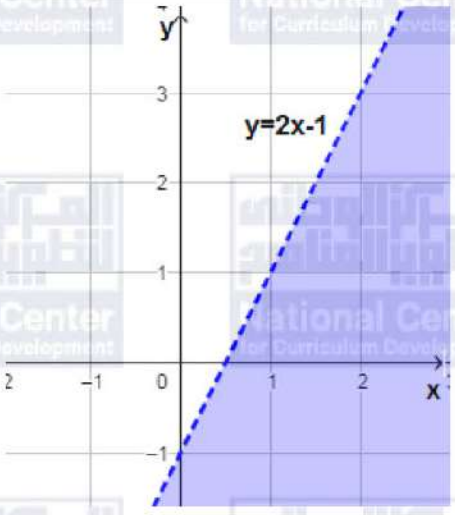
الكميات التي يمكنه شراؤها هي إحداثيات النقاط الواقعة في منطقة الحل.

أكبر كمية كتان هي أكبر إحداثي x لنقاط منطقة الحل، وهو هنا الإحداثي x لنقطة تقاطع المستقيمين

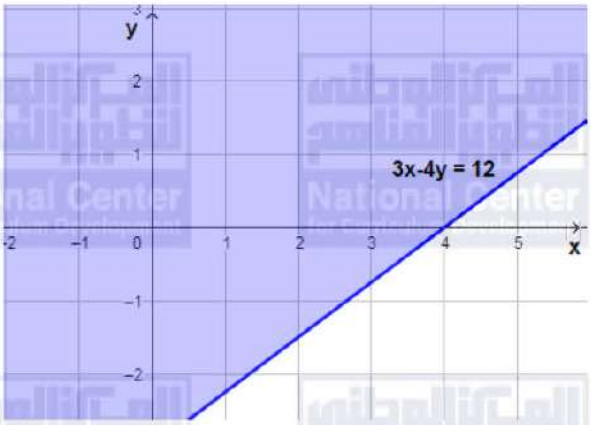
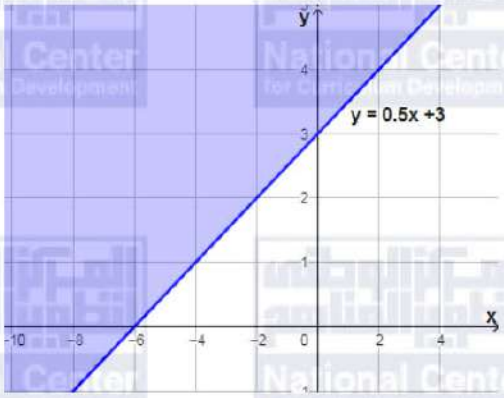
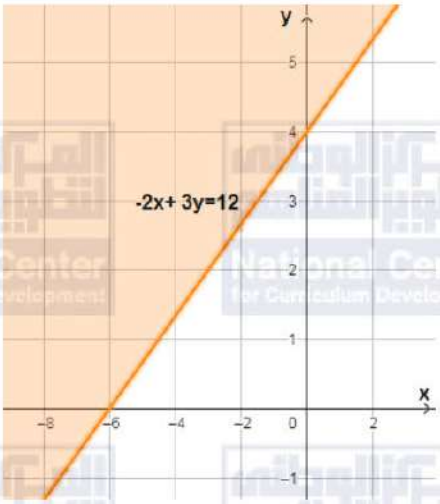
$$5x +8y =200,\ x+y =30$$

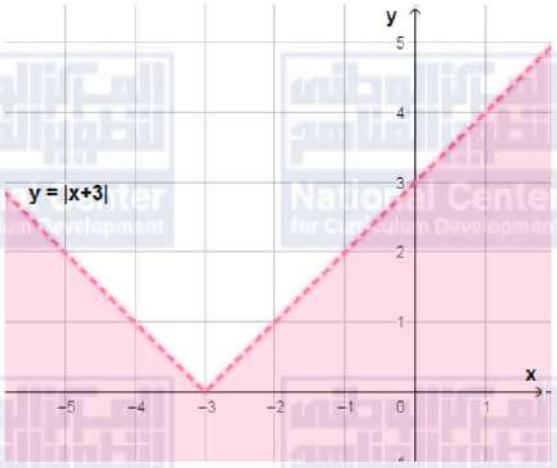
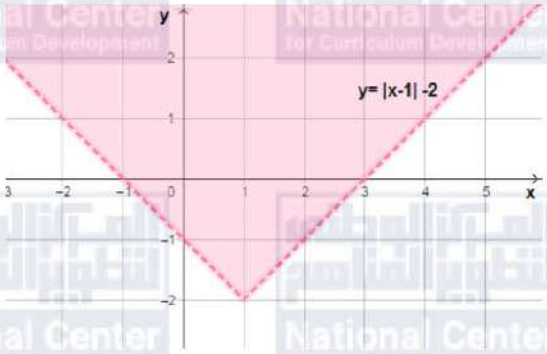
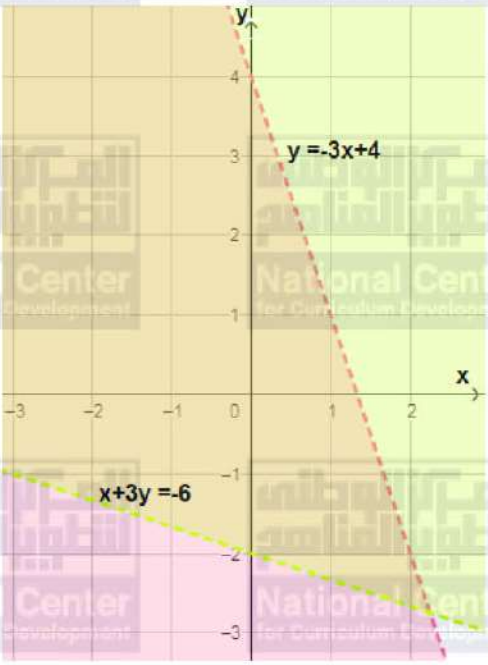
بضرب المعادلة الثانية في 8 وطرح الأولى ينتج أن $3x = 40$ ومنها $x = 13\frac{1}{3}\ m$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 43



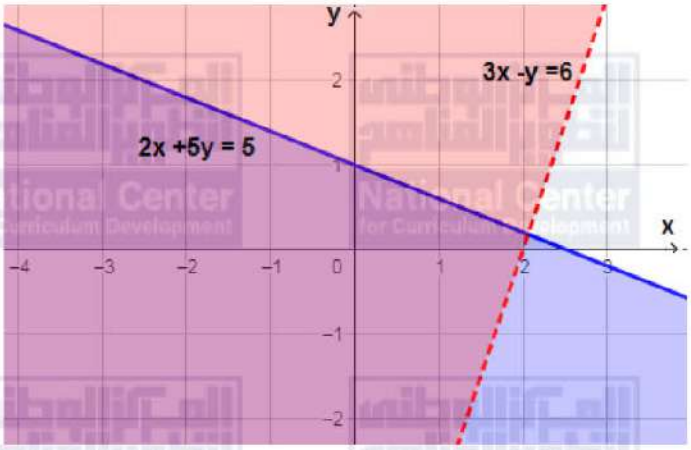
1

2	
3	
4	

5	
6	
7	

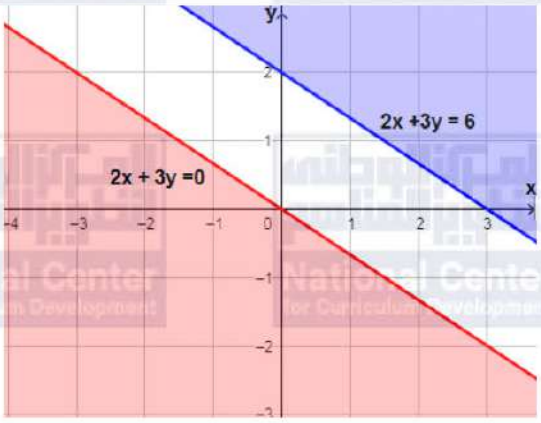
منطقة الحل هي المنطقة التي فيها المزيج من اللونين الأخضر والأحمر.

8



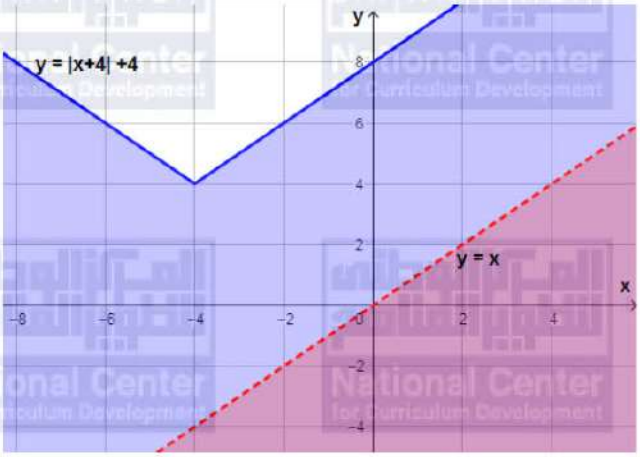
منطقة الحل هي المنطقة التي فيها المزيج من اللونين الأزرق والأحمر.

9

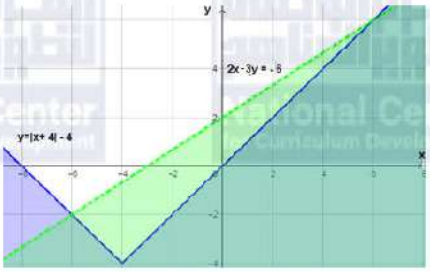
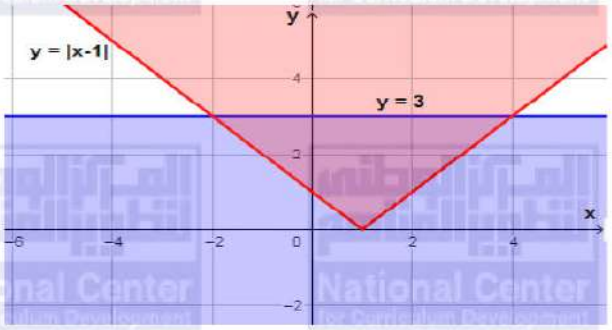
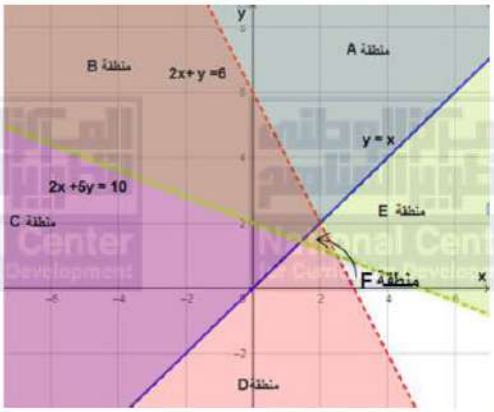


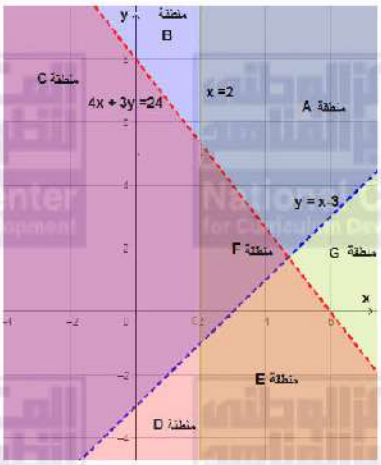
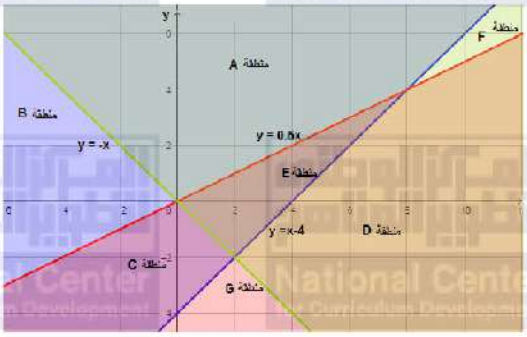
لا يوجد لهذا النظام حل، المنطقتان لا تتقاطعان. مجموعة الحل في هذه الحالة هي ϕ.

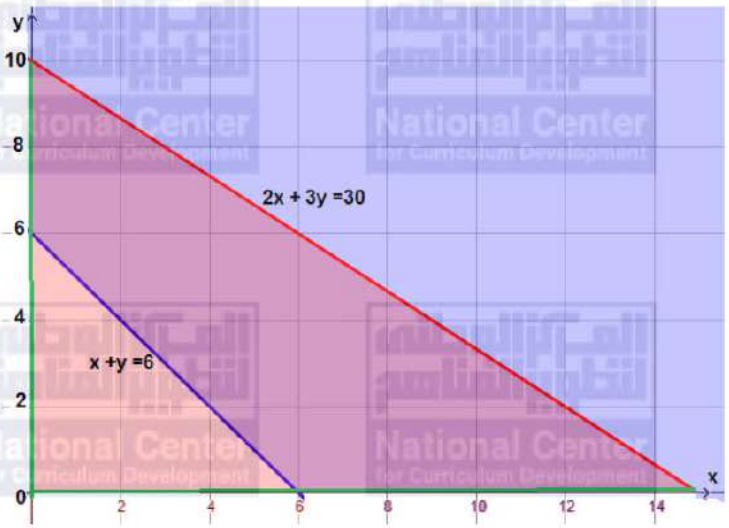
10

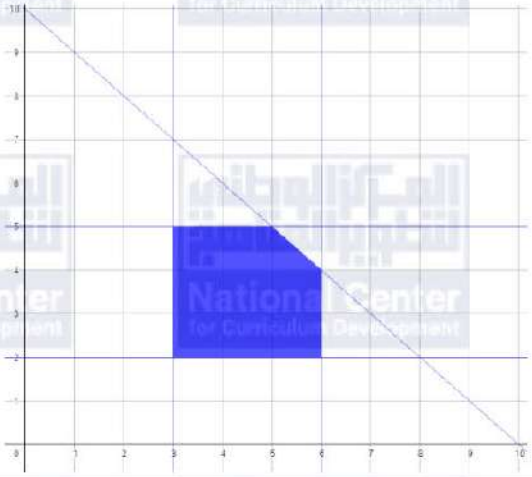


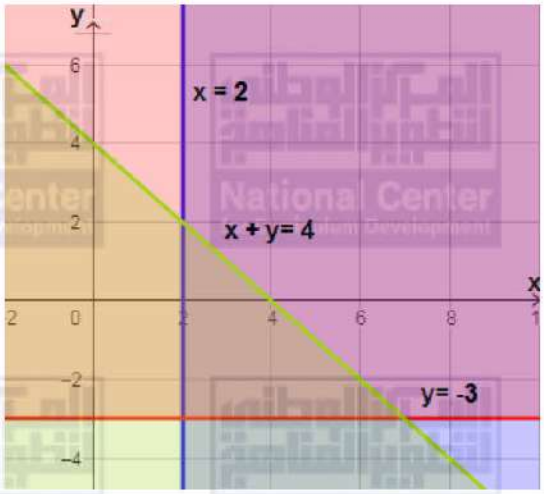
منطقة حل هذا النظام هي المنطقة التي فيها مزيج من اللونين الأزرق والأحمر في أسفل يمين الشكل وهي حل المتباينة $y < x$، فكل زوج يحقق $y < x$ هو في الوقت ذاته يحقق $y \leq |x + 4| + 4$.

11	منطقة الحل هي المنطقة التي فيها مزيج من اللونين الأزرق والأخضر. 
12	منطقة الحل هي المثلث الذي فيه مزيج من اللونين الأحمر والأزرق ورؤوسه (1, 0), (4, 3), (-2, 3) 
13	 منطقة حل هذا النظام هي المنطقةB لأن حل المتباينة $y \geq x$ هو المناطق A, B, C؛ وحل المتباينة $2x+y < 6$ هو المناطق B, C, D, F؛ وحل المتباينة $2x + 5y > 10$ هو المناطق A, B, E,F؛ المنطقة المشتركة بين كل الحلول هي B.

14	 منطقة حل هذا النظام هي المنطقةF لأن حل المتباينة $x \geq 2$ هو المناطق A, F, G, E؛ وحل المتباينة $4x+3y <24$ هو المناطق C, D, E, F؛ وحل المتباينة $y >x -3$ هو المناطق A, B, C,F؛ المنطقة المشتركة بين كل الحلول هي F.
15	 منطقة حل هذا النظام هي المنطقة E لأن حل المتباينة $y \geq x-4$ هو المناطق A, B C, E؛ وحل المتباينة $y \leq 0.5x$ هو المناطق C, D, E, G؛ وحل المتباينة $y \geq -x$ هو المناطقA, D, E,F؛ المنطقة المشتركة بين كل الحلول هي المنطقة E.

16	أفرض أن عدد لفات ورق الزينة الأزرق x، وأن عدد لفات ورق الزينة الذهبي y.  نظام المتباينات الذي يصف هذه المسألة هو: $x+y \geq 6$ $2x + 3y \leq 15$ $x \geq 0, y \geq 0$ منطقة حل هذا النظام هي المنطقة التي يمتزج فيها اللونين الأحمر والأزرق. إحداثيات نقاط منطقة الحل تمثل عدد اللفات التي يمكن لتغريد شراؤها، ومنها (4, 2), (4, 4), (4. 6), (6, 2) , (6, 4), (6, 6), (10, 2), (12, 2)
17	$y > -1.25x-0.25$
18	$y \leq -2x +3$
19	$y \geq 1.5 \|x -2\|$

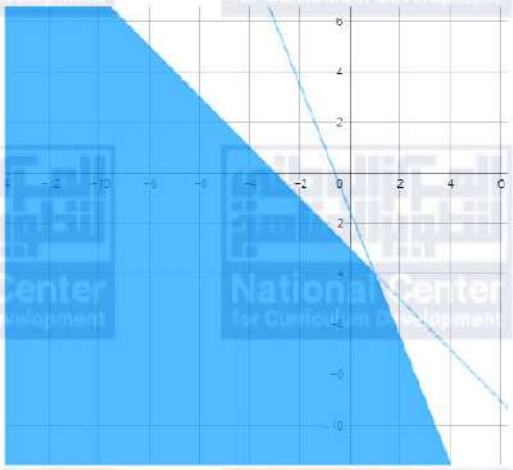
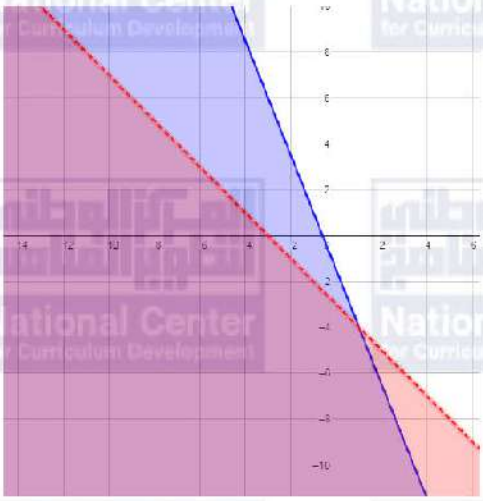
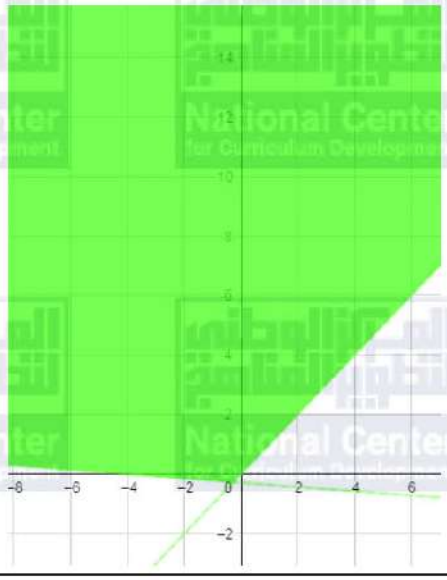
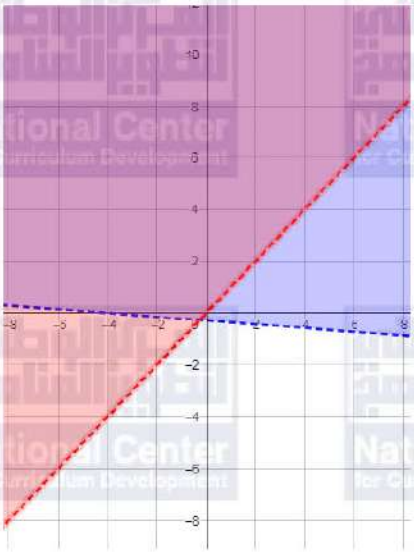
20	أفرض أن رامي يقود الحافلةعلى نحو متواصل x ساعة في اليوم، وأن خليل يقودها y ساعة في اليوم نظام المتباينات هو: $3 \le x \le 6$ $3 \le y \le 5$ $x+ y \le 10$ وتمثيله في الرسم المجاور. 
21	أفرض أن عدد الطاولات المستديرة x، وأن عدد الطاولات المستطيلة y عدد الجالسين حول الطاولات المستديرة 8x؛ وعدد الجالسين حول الطاولات المستطيلة 6y عدد الحضور264 على الأقل المتباينة التي تصف هذا الموقف هي: $8x + 6y \ge 264$ إذا كانت $x = 18$ ، فإن $8(18) + 6y \ge 264$ $144 + 6y \ge 264$ $6y \ge 120$ $y \ge 20$ يلزم 20 طاولة مستطيلة على الأقل.

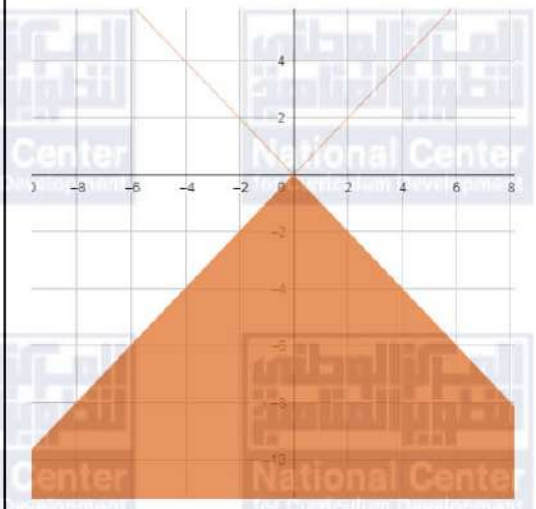
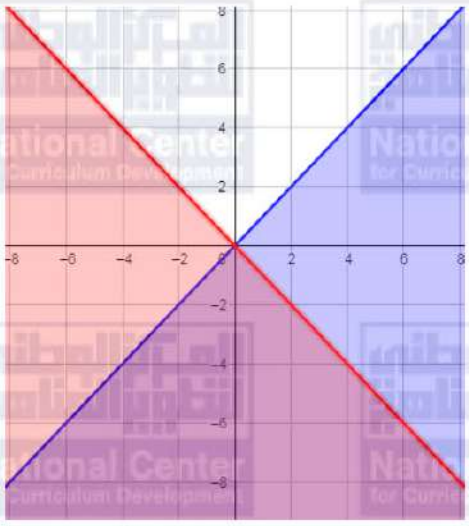
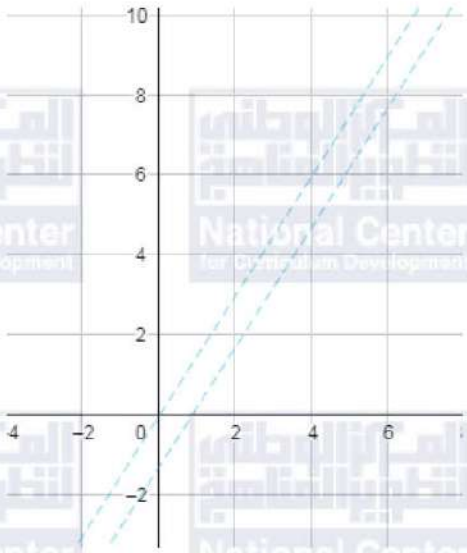
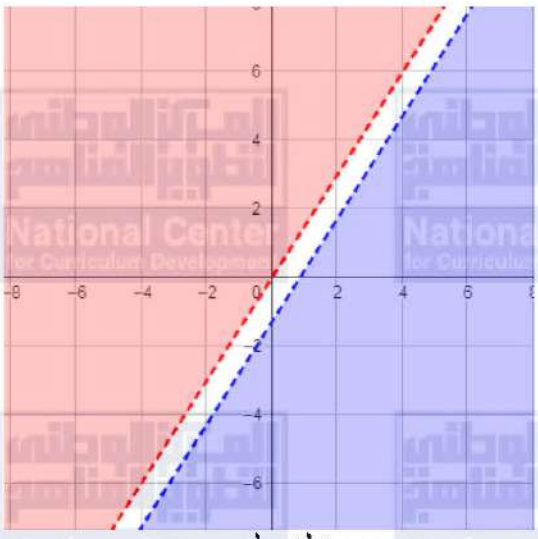
22	منطقة حل النظام هي المثلث القائم الزاوية الذي تحده المستقيمات الثلاث: x=2. y = -3, x+y =4 
23	12.5
24	$x + y \geq 3$, $y \leq \frac{1}{2}x + 3$, $y \geq 5x - 15$
25	9
26	3
27	إجابة محتملة: $x + y \geq 5$ $x + y \leq 5$
28	إجابة محتملة: $y \geq 3x$ $y \leq 2x$
29	صحيحة أحيانًا. النظام $4x+3y \geq 12,\ 4x+3y \leq 10$ ليس له حل، وأما النظام $4x+3y \geq 12,\ 4x+3y \geq 10$ فله حل هو منطقة حل المتباينة $4x+3y \geq 12$

30	بما أن النقطة (3, 2) تحقق المتباينة، فإن $2 > 3m + b$ النقطة (1, 2) لا تحقق المتباينة، فإن $2 \leq m+b$ بإضافة $2m$ لطرفي هذه المتباينة ينتج أن $2+ 2m \leq 3m +b$ ولكن $3m +b < 2$ فنستنتج أن $2+ 2m < 2$ $2m < 0$ $m < 0$ إذن، ميل المستقيم الحدودي سالب.
31	$y \leq \|x\|$ $y \geq - \|x\|$
32	$-2 \leq x \leq 5$ $y \geq x -2$ $y \leq x + 2$

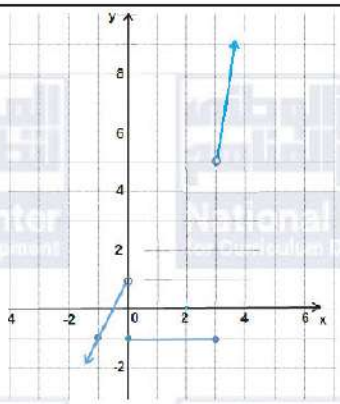
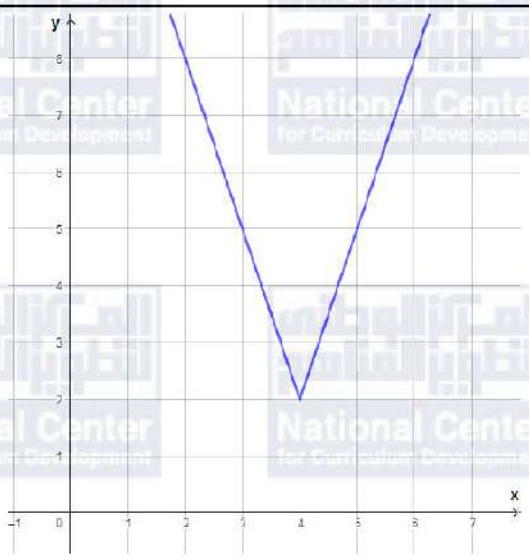
معمل برمجية جيوجبرا: تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيا

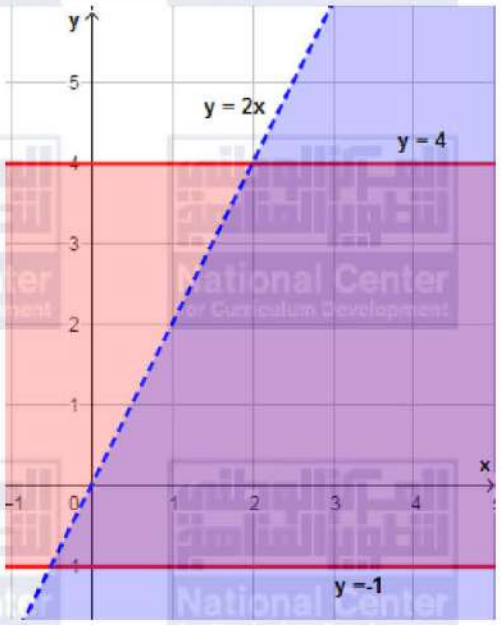
أتدرب صفحة 47

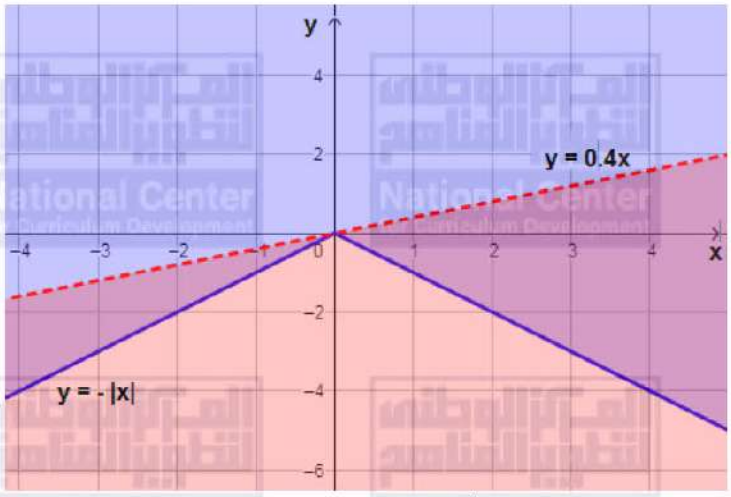
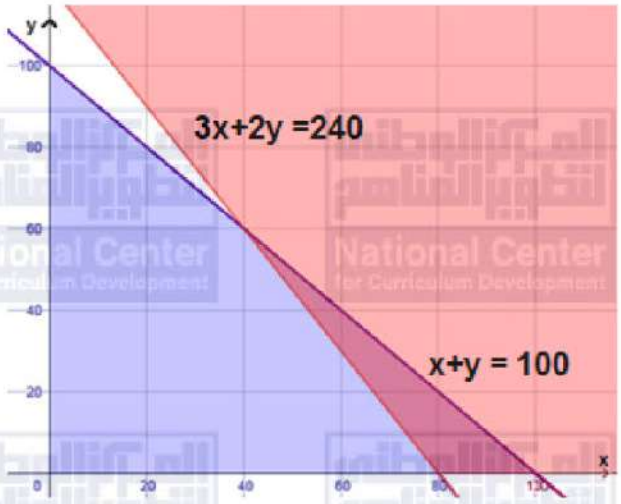
1		
2		

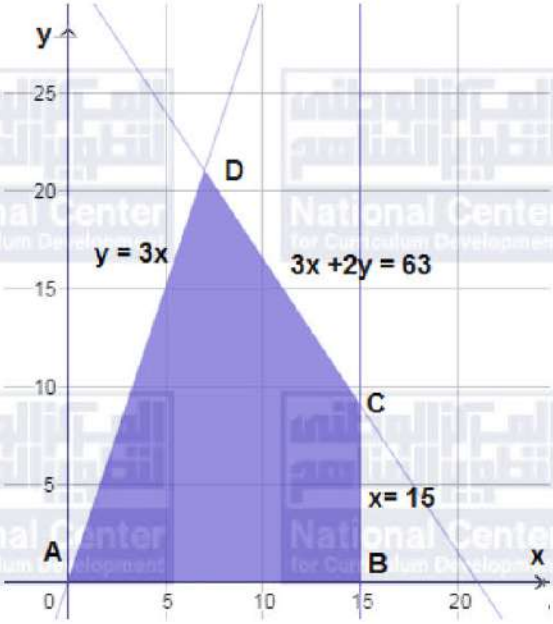
3		
4	 لا يوجد له حل	 لا يوجد له حل

اختبار نهاية الوحدة الأولى

1	d
2	c
3	d
4	a
5	d
6	a
7	b
8	
9	

10	$x = -3.5, x = 0.5$
11	$x = -6, x = -0.25$
12	$x \leq -3$ or $x \geq 6$: $(-\infty, -3] \cup [6, \infty)$
13	$0.5 \leq x \leq 8$:$[0.5, 8]$
14	منطقة الحل هي المظللة بمزيج من اللونين الأحمر والأزرق.
15	منطقة الحل هي المظللة بمزيج من اللونين الأحمر والأزرق. 

16	 منطقة الحل هي المظللة بمزيج من اللونين الأحمر والأزرق.
17	أفرض أن عدد تذاكر المقاعد القريبة من المنصة x، وعدد تذاكر المقاعد الخلفية y عدد التذاكر: $x + y \leq 100$ الإيرادات: $15x + 10y \leq 1200$ $3x + 2y \leq 240$ (بالقسمة على 5)
18	 منطقة الحل هي المظللة بمزيج من اللونين الأحمر والأزرق.
19	0,20,40,60

20	أفرض أن عدد العمال المهرة هو x، والعمال المبتدئين هو y، فيكون نظام المتباينات هو: مجموع الأجور: $30x + 20y \le 630 \rightarrow 3x + 2y \le 63$ عدد العمال المهرة المتوفرين: $x \le 15$ النسبة بين العمال: $x \ge \frac{y}{3} \rightarrow y \le 3x$ عدم السالبية: $x \ge 0, y \ge 0$
21	
22	b
23	d
24	a

الوحدة الثانية: تحليل الاقترانات

الدرس الأول: نظريتا الباقي والعوامل

أتحقق من فهمي صفحة 54

a

×	x^2	$+5x$	-14	
x	x^3	$+5x^2$	$-14x$	0
$+1$	$+x^2$	$+5x$	-14	

ناتج القسمة هو $x^2+5x-14$، والباقي 0

b

×	$2x^2$	$+5x$	$+15$	
x	$2x^3$	$+5x^2$	$+15x$	$+48$
-3	$-6x^2$	$-15x$	-45	

ناتج القسمة هو $2x^2+5x+15$، والباقي 48

أتحقق من فهمي صفحة 57

a الباقي هو $P(1) = 4$

b الباقي هو $P(-3) = -6$

c الباقي هو $P(-\frac{8}{2}) = P(-4) = 17$

أتحقق من فهمي صفحة 58

a

$P(5) = 5^3 - 2(5)^2 - 13(5) - 10$

$= 125 - 50 - 65 - 10 = 0$

إذن، $(x - 5)$ عامل من عوامل $P(x)$

b

لتحليل $P(x)$ أقسم $P(x)$ على $(x-5)$

×	x^2	$+3x$	$+2$	
x	x^3	$+3x^2$	$+2x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-10	

$P(x) = (x-5)(x^2 + 3x + 2)$

$= (x-5)(x+2)(x+1)$

أتحقق من فهمي صفحة 61

a

عوامل الحد الثابت هي ± 1، وعوامل المعامل الرئيس هي ± 1، و ± 5،

الأصفار المحتملة للاقتران هي: $\pm 1, \pm \frac{1}{5}$

بالتعويض نجد أن $P(1) = 5 - 1 - 5 + 1 = 0$

إذن، $(x-1)$ هو أحد عوامل $P(x)$

أجد العوامل الأخرى بالقسمة وتحليل الناتج إن أمكن.

×	$5x^2$	$+4x$	-1	
x	$5x^3$	$+4x^2$	$-x$	0
-1	$-5x^2$	$-4x$	$+1$	

$P(x) = (x-1)(5x^2 + 4x - 1)$

$= (x-1)(5x-1)(x+1)$

إذن، أصفار $P(x)$ هي: $1, -1, \frac{1}{5}$

b

معامل الحد الرئيس يساوي1، فالأصفار المحتملة هي عوامل الحد الثابت 8، وهي: $\pm 1 , \pm 2, \pm 4, \pm 8$

بالتعويض نجد أن $Q(1) = 1+6 +7 -6 -8 = 0$

إذن، $(x-1)$ هو أحد عوامل $Q(x)$

أجد العوامل الأخرى بالقسمة وتحليل الناتج إن أمكن.

×	x^3	$+7x^2$	$+14x$	$+8$	
x	x^4	$+7x^3$	$+14x^2$	$+8x$	0
-1	$-x^3$	$-7x^2$	$-14x$	-8	

$Q(x) =(x-1)(x^3 +7x^2 +14x +8)$

وبتعويض $x = -1$ في العامل التكعيبي نجد أن الناتج 0 ، نقسم $x^3 +7x^2 +14x +8$ على $(x+1)$

×	x^2	$+6x$	8	
x	x^3	$+6x^2$	$+8x$	0
$+1$	$+x^2$	$+6x$	$+8$	

فنجد أن: $Q(x) = (x-1)(x+1)(x^2 +6x + 8)$

$=(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$

إذن، أصفار $Q(x)$ هي: $-1, 1, -2, -4$

أتحقق من فهمي صفحة 63

a

$x^3-x^2-9x+9=0$

$x^2(x-1) -9(x-1)=0$

$(x-1)(x^2 -9) =0$

$(x-1)(x-3)(x+3)=0$

$x =1, x = 3, x= -3$

إذن، حلول هذه المعدلة هي: $x =1, x= 3, x = -3$

b

حلول هذه المعادلة هي $x = 1 , x = -2$، ويمكن حلها بتحليل الطرف الأيسر إلى عوامل بطريقة مشابهة لحل الفقرة a

ويمكن حلها بطريقة المثال 5.

أتحقق من فهمي صفحة 64

نصف قطر قاعدة الاسطوانة 3 cm، وارتفاعها 8 cm

أتدرب وأحل المسائل صفحة 65

1	<table><tr><td>×</td><td>$2x^3$</td><td>$+x^2$</td><td>$+4x$</td><td>$+3$</td><td></td></tr><tr><td>$3x$</td><td>$6x^4$</td><td>$+3x^3$</td><td>$+12x^2$</td><td>$+9x$</td><td>0</td></tr><tr><td>-4</td><td>$-8x^3$</td><td>$-4x^2$</td><td>$-16x$</td><td>-12</td><td></td></tr></table> الناتج: $2x^3 +x^2 +4x +3$ الباقي: 0
2	<table><tr><td>×</td><td>$-x^4$</td><td>$+2x^3$</td><td>$+x^2$</td><td>$-4x$</td><td>$+3$</td><td></td></tr><tr><td>$-2x$</td><td>$2x^5$</td><td>$-4x^4$</td><td>$-2x^3$</td><td>$+8x^2$</td><td>$-6x$</td><td>12</td></tr><tr><td>$+1$</td><td>$-x^4$</td><td>$+2x^3$</td><td>$+x^2$</td><td>$-4x$</td><td>$+3$</td><td></td></tr></table> الناتج: $-x^4+2x^3 +x^2 -4x +3$ الباقي: 12
3	الباقي هو: $f(-1) = 8 -2-53- 37-6 =-90$
4	الباقي هو: $f(-\frac{4}{3}) = 4(-\frac{4}{3})^3 +2(-\frac{4}{3})^2-6(-\frac{4}{3})- 8 =-\frac{160}{27}$
5	$f(-7) =(-7)^3 -37(-7) +84 = 0$ إذن، $(x+7)$ عامل من عوامل $f(x)$.
6	$f(1.5) = 2(1.5)^3-5(1.5)^2 – 1.5 +6 = 0$ إذن، $(2x-3)$ عامل من عوامل $f(x)$.
7	$f(x) = (x+5)(x-3)(x+1)$
8	$g(x) =(x+1)(x-2)(x-3)^2$
9	$h(x)= (x-3)(x-4)(2x+1)$

10	$q(x) = (x-6)(3x^2+2)$
11	$(x-1)(x^2-3x-10)=0$ $(x-1)(x-5)(x+2)=0$ $x=1,\ x=5,\ x=-2$
12	$3x^3-5x^2-47x-15=0$ $(x+3)(3x^2-14x-5)=0$ $(x+3)(3x+1)(x-5)=0$ $x=-3,\ x=-\frac{1}{3},\ x=5$
13	$(x-2)(3x^2+9x+4)=0$ $x=2,\ x=\frac{-9\pm\sqrt{81-48}}{2(3)}$ $x=2,\ x=\frac{-9+\sqrt{33}}{6},\ x=\frac{-9-\sqrt{33}}{6}$ $x=2,\ x\approx -0.54,\ x\approx -2.46$
14	$(x-2)(6x^2-x-1)=0$ $(x-2)(3x+1)(2x-1)=0$ $x=2,\ x=-\frac{1}{3},\ x=\frac{1}{2}$

15

$V(x) = 2x^3 + 5x^2 - 19x - 42$

$= (x-3)(2x^2+11x+14)$

$= (x-3)(2x+7)(x+2)$

إذن، طولا ضلعي القاعدة هما $(x+2)$، و$(2x+7)$

مساحة السطح الكلية = المساحة الجانبية $+2\times$ مساحة القاعدة

$A(x) = 2(2x+7+x+2)(x-3) + 2(2x^2+11x+14)$

$= 2(3x+9)(x-3) + 4x^2 + 22x + 28$

$= 6x^2 - 54 + 4x^2 + 22x + 28$

$= 10x^2 + 22x - 26$

16

أحد أصفار الاقتران هو $x=1$، إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $f(x)$

$f(x) = (x-1)(4x^2 + 4x - 16)$

صفراه الآخران هما جذرا المعادلة $4x^2 + 4x - 16 = 0$

$x^2 + x - 4 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$$

$x \approx 1.56, \quad x \approx -2.56$

17

أحد أصفار الاقتران هو $x = -1$، إذن، $(x+1)$ عامل من عوامل $f(x)$

$f(x) = (x+1)(4x^2 - 16x + 15)$

صفراه الآخران هما جذرا المعادلة $4x^2 - 16x + 15 = 0$

$(2x-3)(2x-5) = 0$

$x = 1.5, \; x = 2.5$

18	افرض أن الحل الثالث هو $x=c$ ، فيكون $(x-1), (x-4), (x-c)$ عوامل للمقدار $x^3 -3x^2 +ax +b$ $x^3 -3x^2 +ax +b = (x-1)(x-4)(x-c)$ $x^3 -3x^2 +ax +b = (x^2-5x +4)(x-c)$ $x^3 -3x^2 +ax +b = x^3 -cx^2 -5x^2+5cx +4x-4c$ $x^3 -3x^2 +ax +b = x^3 -(c+5)x^2+(4+5c)x -4c$ بمقارنة معاملات الحدود المتشابهة في الطرفين نجد أن: معامل x^2 : $-3 = -(c+5)$ $c+5 =3 \rightarrow c = -2$ إذن، الحل الثالث هو $x = -2$
19	هذا يعني أن $f(1) = 2f(-1)$ $1+a +1 +5= 2(-1+a-1+5)$ $a +7= 2a + 6$ $a = 1$

20	حجم الهرم = ثلث مساحة قاعدته مضروبًا في ارتفاعه، افرض أن طول ضلع القاعدة هو x، فيكون الارتفاع x +1 $V = \frac{1}{3}x^2(x+1)$ $4 = \frac{1}{3}x^2(x+1)$ $12 = x^3 + x^2$ $x^3 + x^2 - 12 = 0$ $(x-2)(x^2+3x+6) = 0$ $x-2=0,\ x^2+3x+6=0$ المعادلة $x^2+3x+6=0$ ليس لها حل لأن مميزها سالب(-15)، فالحل الوحيد للمعادلة $x^3 + x^2 - 12 = 0$ هو $x=2$ إذن، طول ضلع قاعدة المنحوتة هو 2 m، وارتفاعها 3 m
21	$f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 9$ عامل من عوامل (x-3) إذن، $f(3) = 0$ $27a + 9b - 27 - 9 = 0$ $27a + 9b = 36$ بقسمة الطرفين على 9 ينتج أن: $3a + b = 4$
22	باقي قسمة f(x) على (x – 2) يساوي 15-، يعني أن $f(2) = -15$ $8a + 4b - 18 - 9 = -15$ $8a + 4b = 12$ بقسمة الطرفين على 4 ينتج أن: $2a + b = 3$

23	بطرح المعادلة الناتجة في سؤال22 من المعادلة الناتجة في سؤال 21 نجد أن a =1، وبتعويض قيمة a في إحدى المعادلتين نجد أن b = 1
24	حجم الصندوق يساوي $2(x)(x^2+6x-19)$، وهذا يساوي $48\ m^3$ $2(x)(x^2+6x-19)= 48$ بقسمة الطرفين على 2، والتوزيع ينتج أن: $x^3 + 6x^2 - 19x = 24$ $x^3 + 6x^2 - 19x-24 = 0$ $(x-3)(x^2+9x+8) =0$ $(x-3)(x+1)(x+8) = 0$ $x= 3, x = -1, x = -8$ الحلان السالبان مرفوضان لأن x أحد أبعاد الصندوق ولا يمكن أن يكون سالبًا. إذن، قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ m^3$ هي $3\ m$
25	بما أن $(x-3)$ عامل لاقتران من الدرجة الثالثة فإن العامل الثاني يكون تربيعيًا أفرضه ax^2+bx+c $f(x) = (x-3)(ax^2+bx+c)$ باقي قسمة f(x) على (x+1) هو 8-، فإن f(-1) = -8 $(-1-3)(a-b+c) = -8$ $a- b + c = 2$ لذلك أختار أي قيم تحقق هذه المعادلة مثل $a = 1, b=1, c= 2$ فيكون الاقتران المطلوب هو: $f(x)= (x-3)(x^2+x+2)$ $f(x) = x^3-2x^2-x-6$

26	قسمت سهام عوامل الحد الرئيس على عوامل الحد الثابت بعد إخراج العامل المشترك في حدود الاقتران وهو x. الحل الصحيح هو $f(x) = x(-8x^5 = 7x^4 -3x^3 +45x^2 -1500x+16)$ عوامل الحد الثابت (16) هي: $\pm1, \pm2, \pm4 \pm8, \pm16$ عوامل المعامل الرئيس(8-) هي: $\pm1, \pm2, \pm4 \pm8$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1, \pm2, \pm4 \pm8, \pm16, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$
27	لم يبق حدود يمكن قسمتها بعد قسمة $4x^2$- على x^2، لذلك انتهت عملية القسمة، ويكون الفرق بين المقسوم ومجموع الحدود داخل منطقة العمل هو باقي القسمة المدون إلى يمين منطقة العمل. الناتج هو 4x-4 الباقي: 12 -13x
28	$x^{13} -15x^9 -16x^5 = x^5(x^8-15x^4- 16)$ $=x^5(x^4-16)(x^4+ 1)$ $= x^5(x^2-4)(x^2 +4)(x^4 +2x^2+1-2x^2)$ $= x^5(x-2)(x+2)(x^2 +4)((x^2 +1)^2-2x^2))$ $= x^5(x-2)(x+2)(x^2 +4)((x^2 +1) -\sqrt{2}x))\ ((x^2 +1) +\sqrt{2}x))$ $= x^5(x-2)(x+2)(x^2 +4)(x^2 -\sqrt{2}x +1)(x^2 +\sqrt{2}x+1)$

×	4x	-4	
x^2	$4x^3$	$-4x^2$	
+3x	$+12x^2$	-12x	-13x+12
-4	-16x	16	

الدرس الثاني: الكسور الجزئية

أتحقق من فهمي صفحة 70	
a	$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{(x-3)}-\frac{2}{(x-2)}$
b	$\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}=\frac{2}{3(x+2)}-\frac{4}{15(x-1)}+\frac{3}{5(x+4)}$
أتحقق من فهمي صفحة 72	
	$\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}=\frac{-5}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{(x-2)}$
أتحقق من فهمي صفحة 74	
	$\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)}=\frac{2}{x+5}+\frac{-2x+3}{(x^2+3)}$
أتحقق من فهمي صفحة 76	
	$\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x}=3+\frac{4}{x}+\frac{5}{x+1}$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 76	
1	$\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)}=\frac{-9}{x+2}+\frac{11}{x+3}$
2	$\frac{2x+22}{x(x+2)}=\frac{11}{x}-\frac{9}{x+2}$
3	$\frac{4x-30}{(x-5)(x-3)}=\frac{-5}{x-5}+\frac{9}{x-3}$
4	$\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{4}{x-2}+\frac{2x-3}{x^2+1}$
5	$\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}=\frac{-2}{x}+\frac{5}{x-1}+\frac{2}{1-2x}$

6	$\frac{x}{(4x-3)(2x-1)}=\frac{3}{2(4x-3)}-\frac{1}{2(2x-1)}$
7	$\frac{1}{(x+3)(x-5)(2x+1)}=\frac{1}{40(x+3)}+\frac{1}{88(x-5)}-\frac{4}{55(2x+1)}$
8	$\frac{9x^2-9x+6}{(x-2)(x+2)(2x-1)}=\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}-\frac{1}{2x-1}$
9	$\frac{5+3x-x^2}{(x+2)(x-2)(3-x)}=\frac{1}{4(x+2)}+\frac{7}{4(x-2)}+\frac{1}{3-x}$
10	$\frac{(x-3)^2}{x(x+4)(x-4)}=\frac{-9}{16x}+\frac{49}{32(x+4)}+\frac{1}{32(x-4)}$
11	$\frac{7x-3}{(x-4)^2}=\frac{7}{(x-4)}+\frac{25}{(x-4)^2}$
12	$\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{1}{9(x+1)}-\frac{1}{9(x-2)}+\frac{1}{3(x-2)^2}$
13	$\frac{2x^2-x-6}{x(x+2)^2}=\frac{-3}{2x}+\frac{7}{2(x+2)}-\frac{2}{(x+2)^2}$
14	$\frac{x-3}{x(x^2+3)}=\frac{-1}{x}+\frac{x+1}{x^2+3}$
15	$\frac{x^2+2x+40}{(x-5)(x^2+5x+25)}=\frac{1}{x-5}-\frac{3}{x^2+5x+25}$
16	$\frac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^3+216}=-2+\frac{-30x^2+36x+648}{x^3+216}$ $=-2+\frac{-30x^2+36x+648}{(x+6)(x^3-6x+36)}=-2+\frac{-6}{x+6}+\frac{-24x+144}{x^2-6x+36}$

17	$x+4+\frac{-14x-58}{x^2+8x+15}=x+4+\frac{-14x-58}{(x+5)(x+3)}$ $=x+4-\frac{6}{(x+5)}-\frac{8}{(x+3)}$
18	$x^2+\frac{2x^2+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$ $=x^2+\frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x^2+1)}=x^2+\frac{3}{x-2}-\frac{x+1}{x^2+1}$
19	$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$ $A(x+a)+B(x-a)=1$ بتعويض $x=a$ ينتج أن $A=\frac{1}{2a}$ ، بتعويض $x=-a$ ينتج أن $B=\frac{-1}{2a}$ ، إذن، $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a(x-a)}+\frac{-1}{2a(x+a)}$ $=\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}$
20	p =5
21	$\frac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)}=\frac{(px-37)(x-1)^2-p(x-1)\ (x^2+2)+24p(x^2+2)}{9(x-1)^2(x^2+2)}$ $9(x^2+8x+7)=(px-37)(x-1)^2-p(x-1)\ (x^2+2)+24p(x^2+2)$ بتعويض x = 1 ينتج أن: 9(1+8+7) = 24p(1+2) 144 =72p p =2
22	$\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}=\frac{-2000}{11-7x}+\frac{2000}{7-4x}=\frac{2000}{7-4x}-\frac{2000}{11-7x}$
23	اقتران أعلى درجة حرارة هو $\frac{2000}{7-4x}$ ، اقتران أدنى درجة حرارة هو $\frac{2000}{11-7x}$.

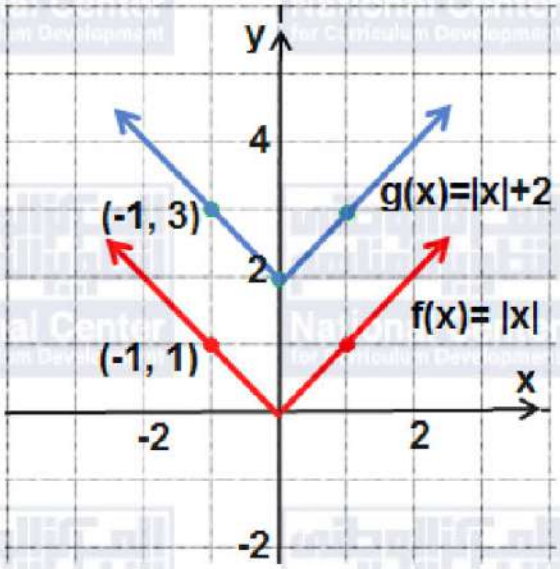
24	$\frac{t^2-5t+8}{(t+2)(t^2-1)}=\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t-1}$ $=\frac{\frac{20}{3}}{t+2}+\frac{-6}{t+1}+\frac{\frac{1}{3}}{t-1}$ $=\frac{\frac{20}{3}}{t+2}+\frac{-\frac{17}{3}t+\frac{19}{3}}{t^2-1}$ نعم يمكن.
25	$\frac{x^3-2x^2+4x+3}{x^4}=\frac{x^3}{x^4}-\frac{2x^2}{x^4}-\frac{4x}{x^4}+\frac{3}{x^4}$ $=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}$
26	$\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=\frac{2}{x-2}+\frac{14}{(x-2)^2}+\frac{15}{(x-2)^3}$
27	$\frac{3x^3+12x-20}{x^4-8x^2+16}=\frac{3x^3+12x-20}{(x^2-4)^2}$ $=\frac{3x^3+12x-20}{(x-2)^2(x+2)^2}$ $=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}$ $3x^3+12x-20=A(x-2)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+2)(x-2)^2+D(x-2)^2$ بتكوين معادلات وحلها ينتج أن: $A=\frac{17}{8},B=\frac{7}{4},C=\frac{7}{8},D=-\frac{17}{4}$ $\frac{3x^3+12x-20}{(x-2)^2(x+2)^2}=\frac{17}{8(x-2)}+\frac{7}{4(x-2)^2}+\frac{7}{8(x+2)}-\frac{17}{4(x+2)^2}$
28	الخطأ الذي وقعت فيه رنيم هو أنها جعلت مقامي الكسرين متماثلين في حين أنه يجب أن تجعل مقام الكسر الثاني $(x+3)^2$. تكون الخطوة الأولى الصحيحة على النحو الآتي: $\frac{5x+2}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}$

29	$\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ $ax+b=A(x+1)+B(x-1)$ $x=1\Rightarrow a+b=2A\Rightarrow A=\frac{a+b}{2}$ $x=-1\Rightarrow -a+b=-2B\Rightarrow B=\frac{-a+b}{-2}=\frac{a-b}{2}$
30	تتنوع الإجابات. هذا مثال لإجابة محتملة: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-2x+7}{2x^3-7x^2+9}$ $=\frac{x^2-2x+7}{(x-3)(2x^2-x-3)}$ $=\frac{x^2-2x+7}{(x-3)(2x-3)(x+1)}$ $=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{x+1}$ $=\frac{5}{6(x-3)}-\frac{5}{3(2x-3)}+\frac{1}{2(x+1)}$

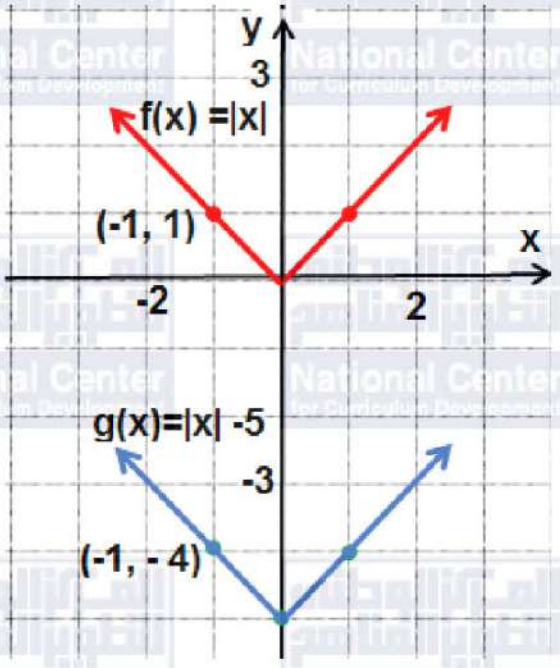
الدرس الثالث: التحويلات الهندسية للاقترانات

أتحقق من فهمي صفحة 80

a

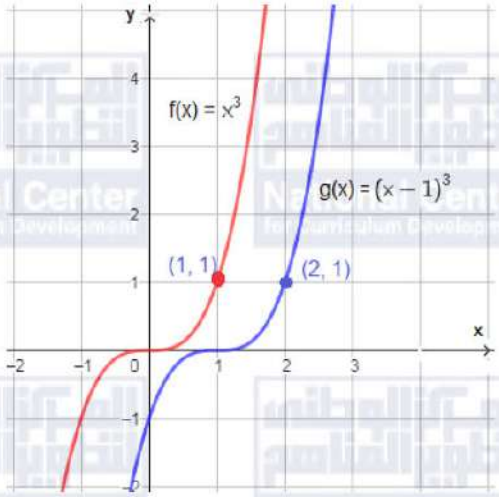


b

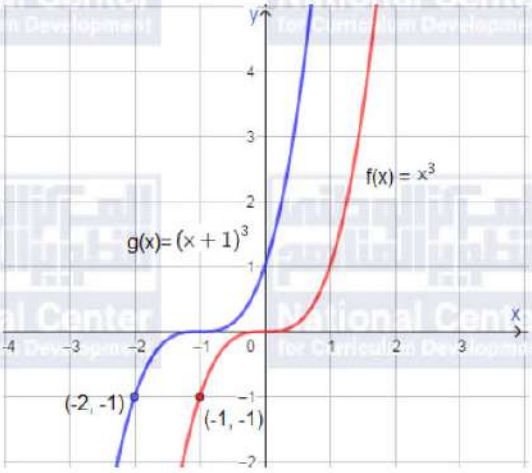


أتحقق من فهمي صفحة 81

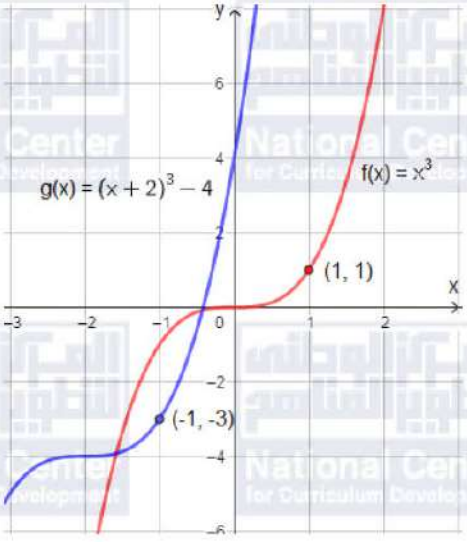
a



b

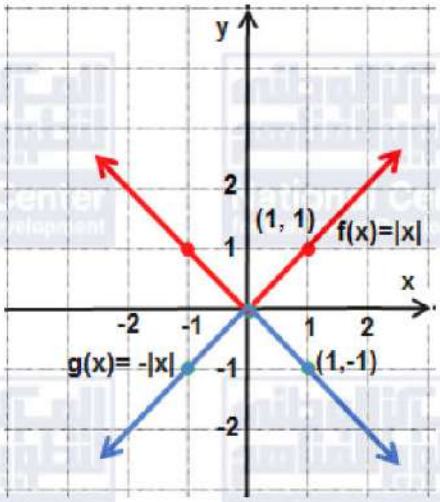


c

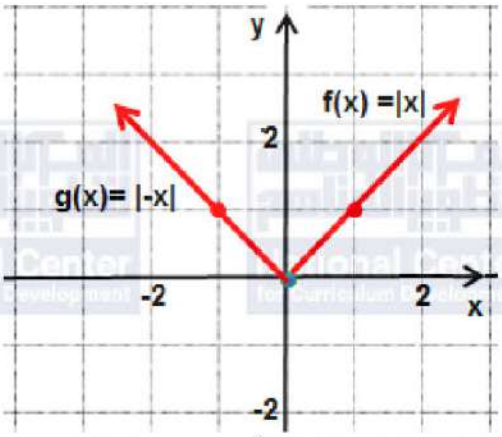


أتحقق من فهمي صفحة 83

a



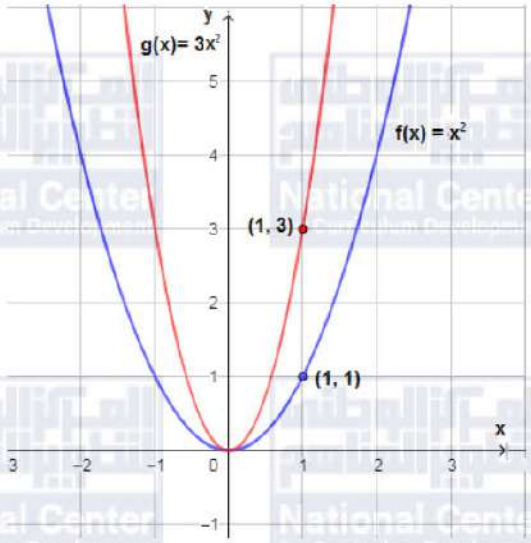
b



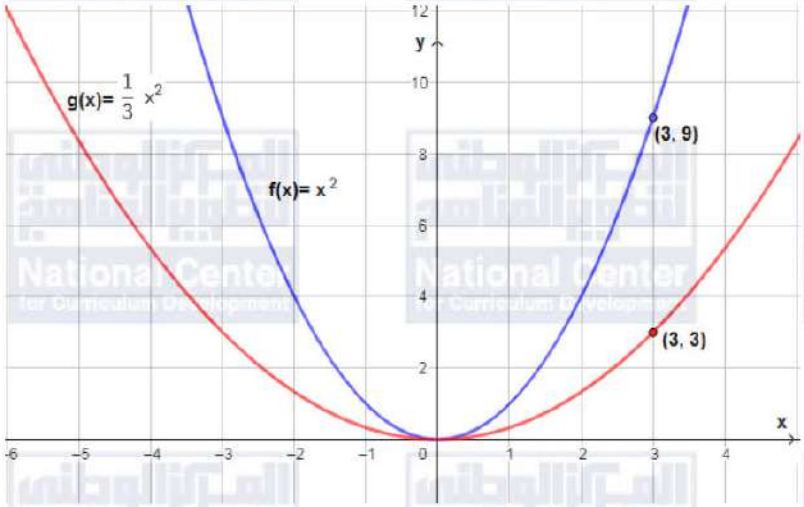
يتطابق منحنى f(x) =|x| مع منحنى g(x)= |-x| لأنه متماثل حول المحور y، فبالانعكاس حول المحور y يبقى المنحنى على وضعه دون تغيير.

أتحقق من فهمي صفحة 84

a

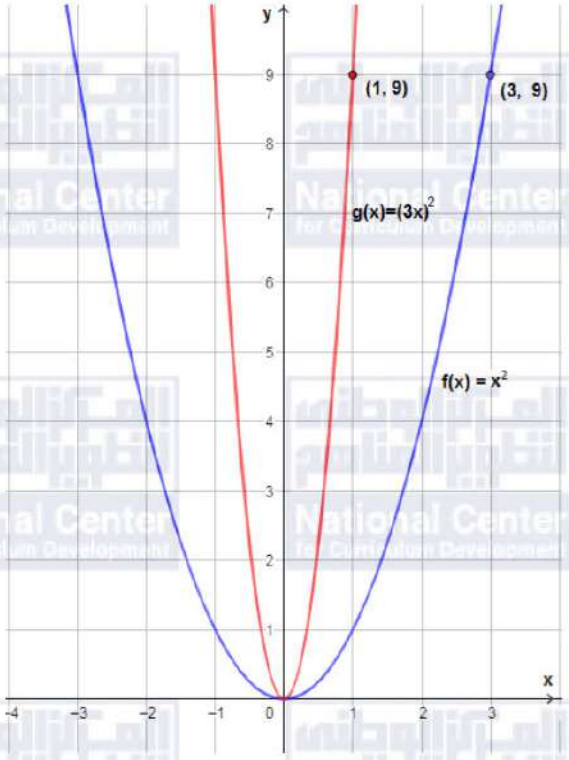


b

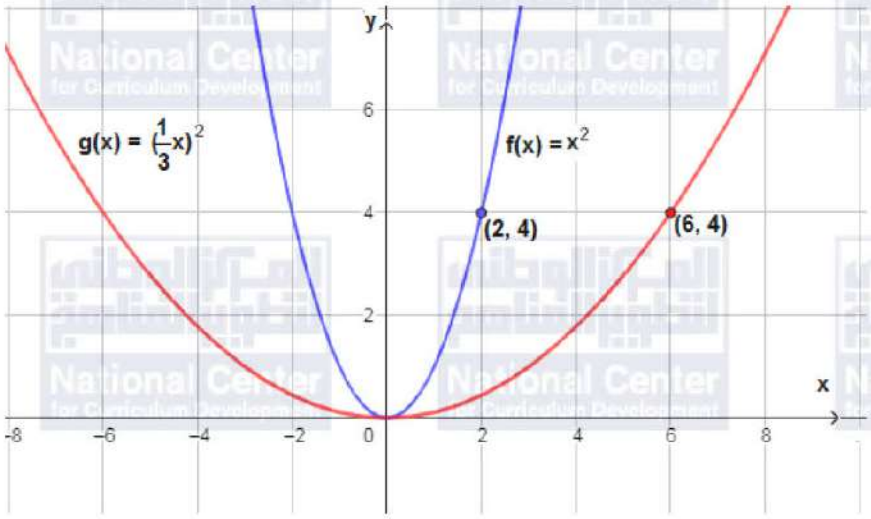


أتحقق من فهمي صفحة 85

a

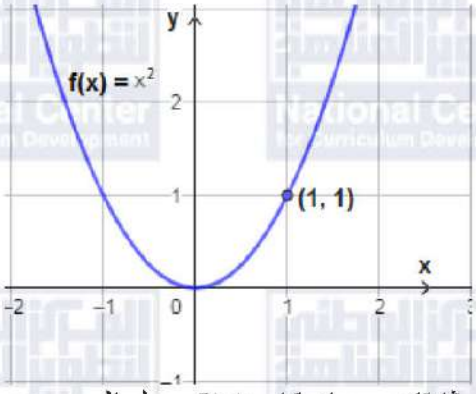


b

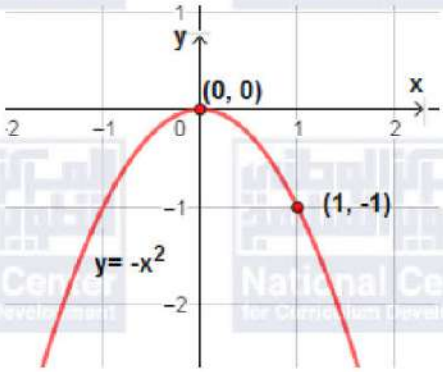


أتحقق من فهمي صفحة 86

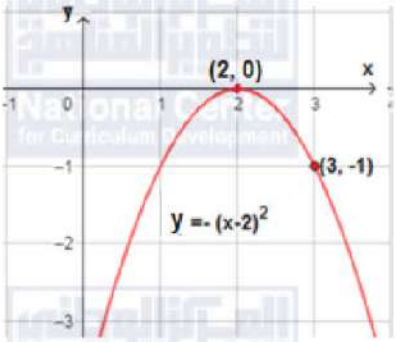
أولًا: رسم $f(x) = x^2$



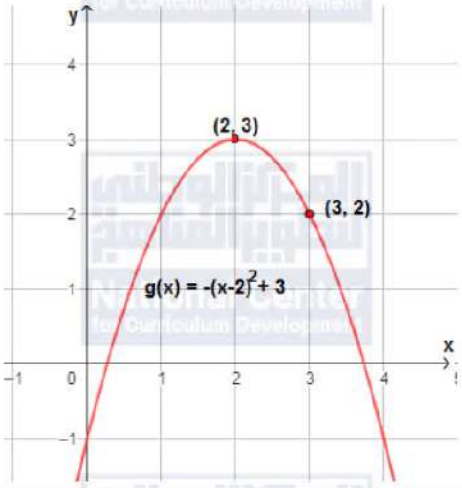
ثانيًا: رسم انعكاس $f(x)$ حول المحور x



ثالثًا: انسحاب وحدتين إلى اليمين

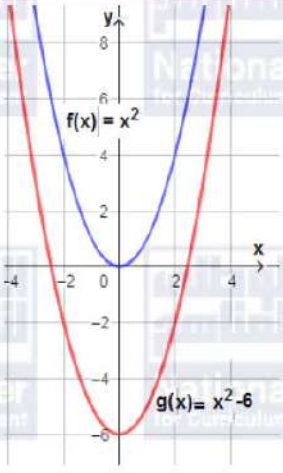


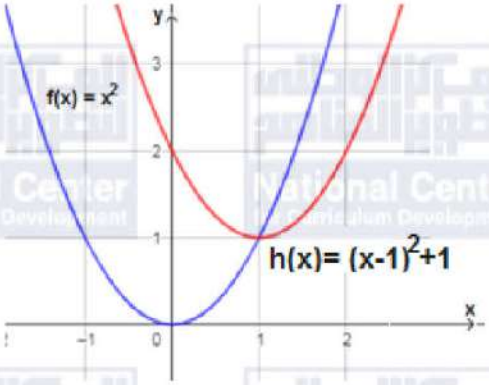
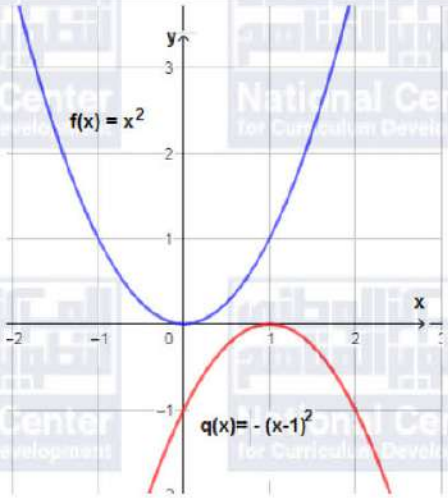
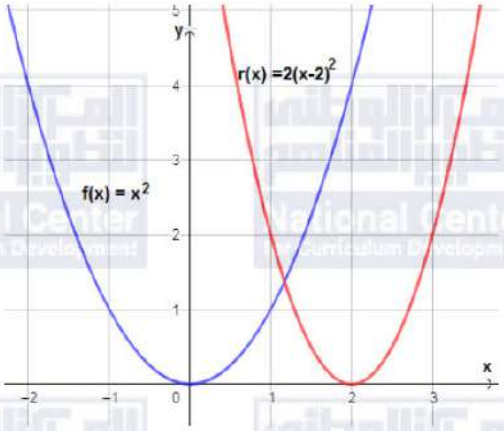
رابعًا: انسحاب 3 وحدات إلى الأعلى

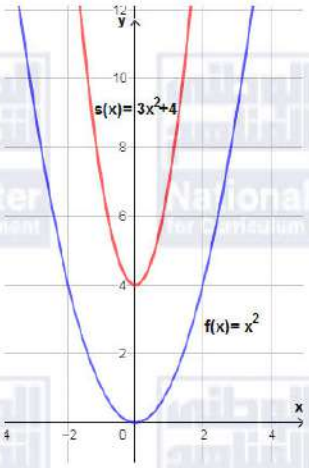
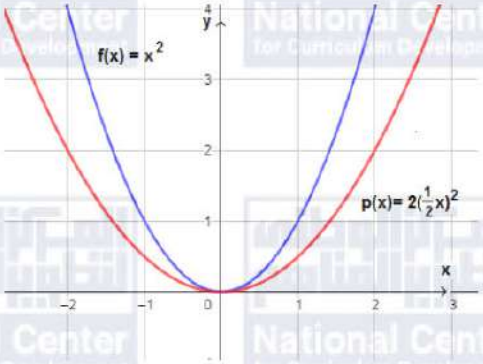
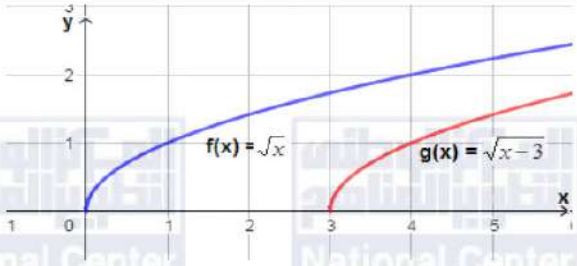
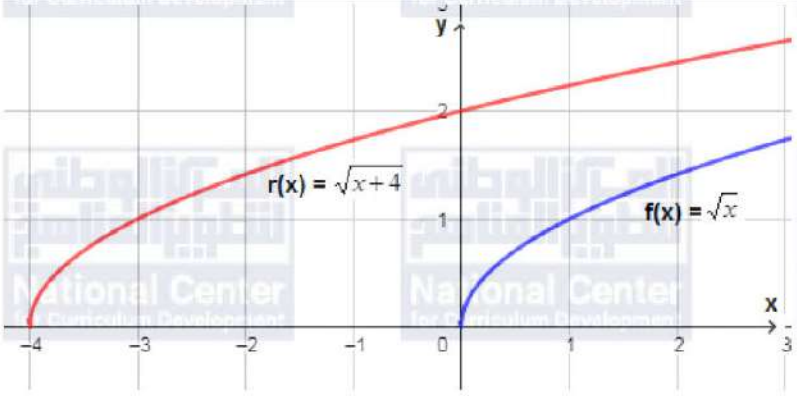


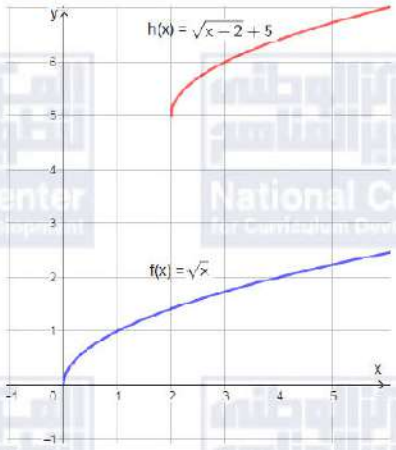
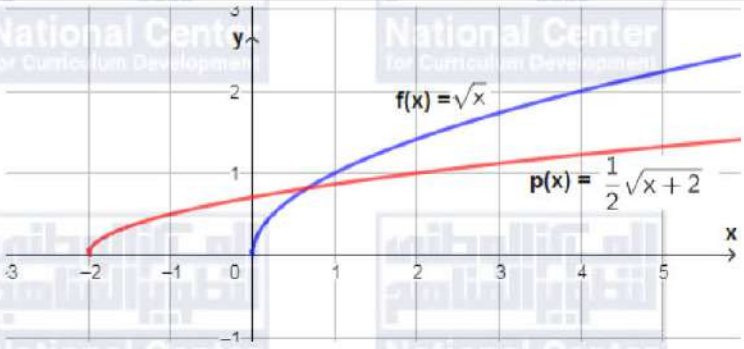
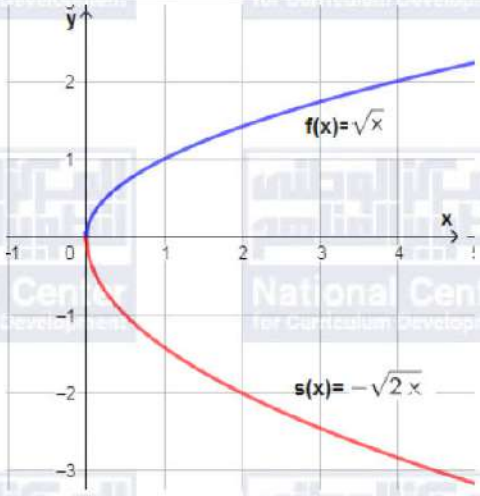
أتدرب وأحل المسائل صفحة 87

1

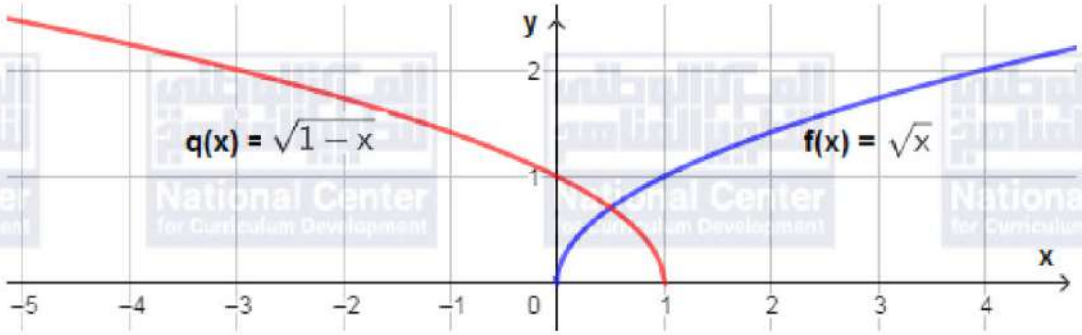


2	 y 3 2 1 f(x) = x2 h(x)= (x-1)2+1 x −1 0 1 2
3	 y 3 2 1 f(x) = x2 x −2 −1 0 1 2 −1 q(x)= - (x-1)2
4	 y 4 3 2 1 r(x) =2(x-2)2 f(x) = x2 x −2 −1 0 1 2 3

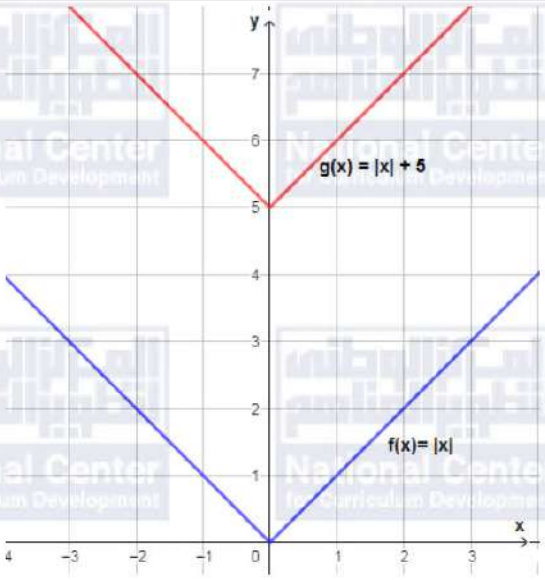
5	 y s(x)= 3x²+4 f(x)= x² x
6	 y f(x) = x² p(x)= 2(½x)² x
7	 y f(x) = √x g(x) = √x−3 x
8	 y r(x) = √x+4 f(x) = √x x

9	
10	
11	

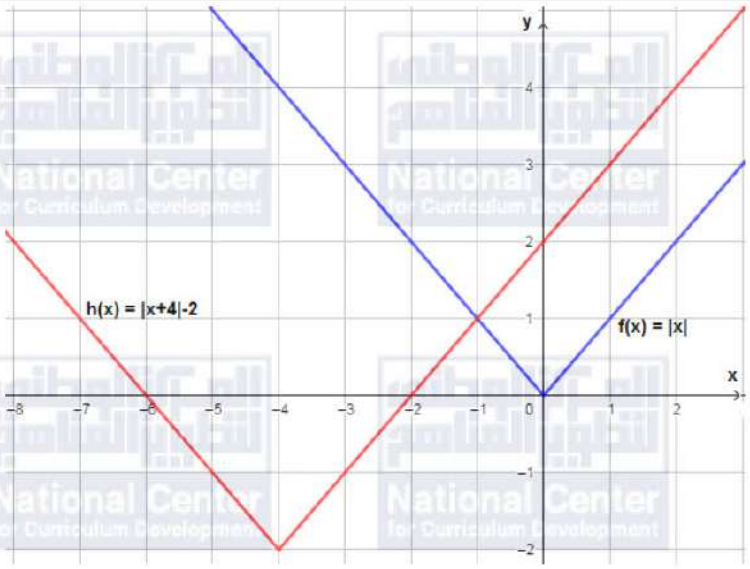
12



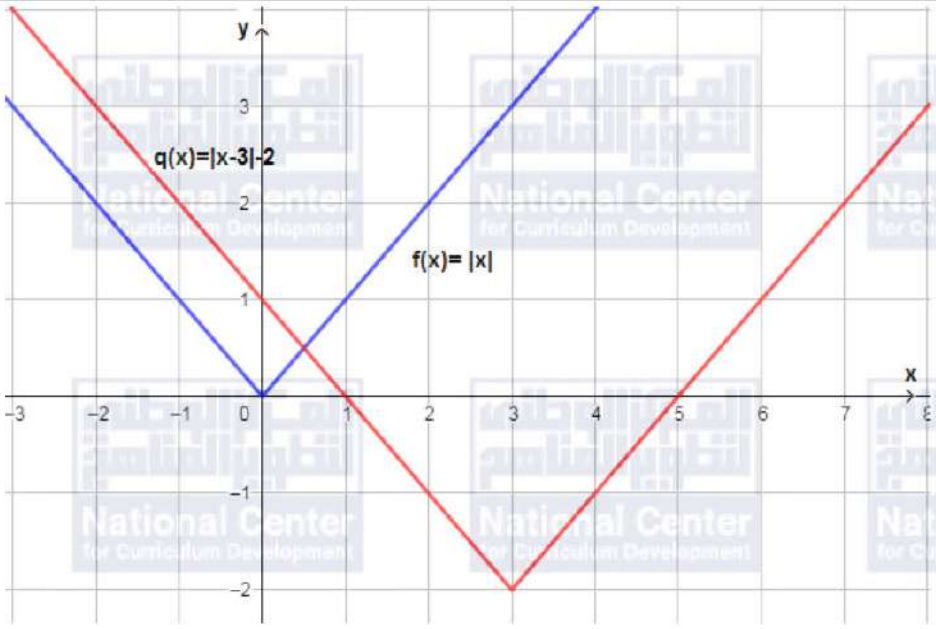
13



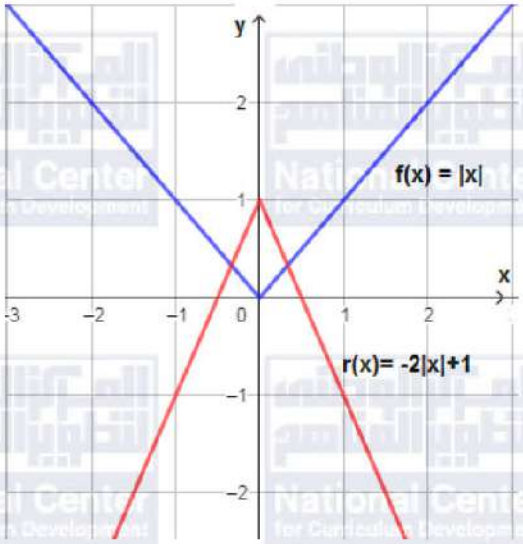
14



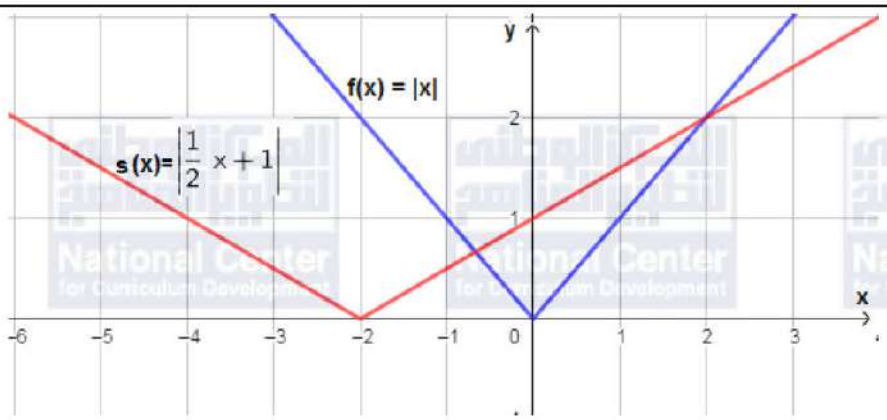
15

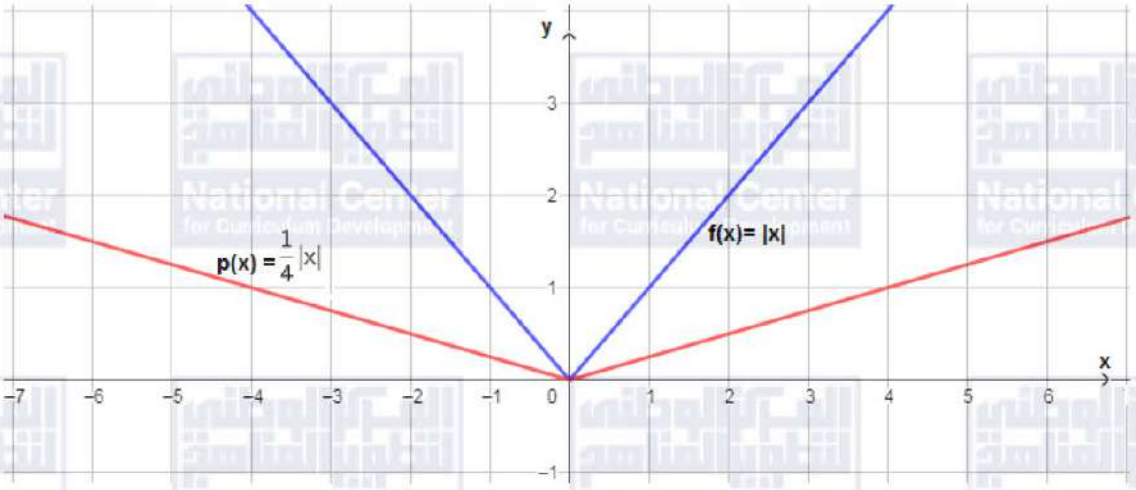


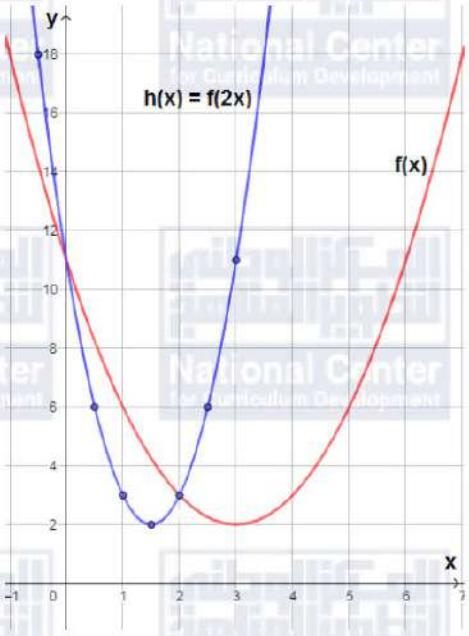
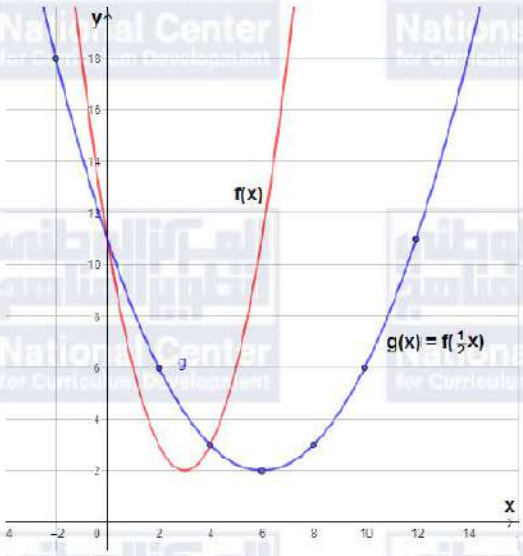
16

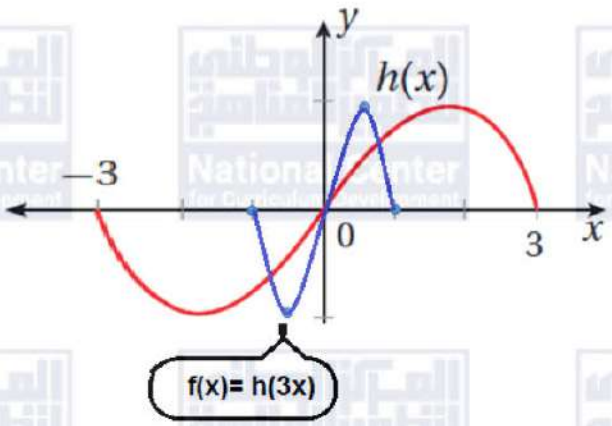
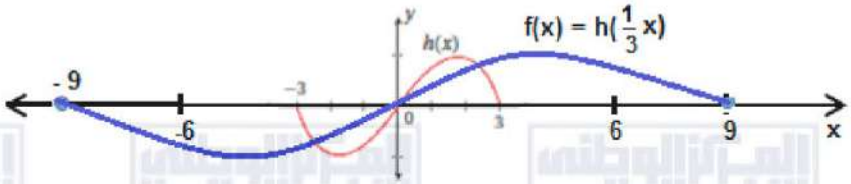


17



18	
19	$g(x) = (x-2)^2$
20	$g(x)=x^3+3$
21	$g(x)=\|x+1\|+2$
22	$g(x)= 2\|x\|$
23	$g(x)= -(x-2)^2+1$
24	$g(x)= -\sqrt{x+2}$
25	g(x)→3, b) h(x)→1, c) g(x)→2, d) h(x)→4

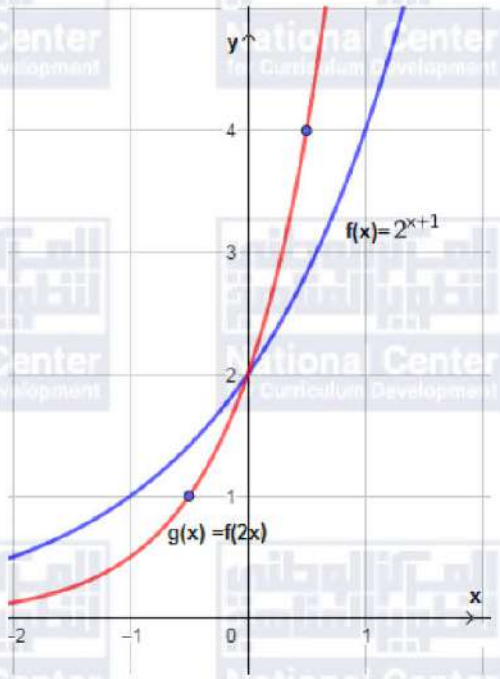
26	لرسم منحنى f(2x) أضرب الإحداثي x لكل نقطة على منحنى f(x) في $\frac{1}{2}$، ولرسم $f(\frac{1}{2}x)$ أضرب الإحداثي x لكل نقطة على منحنى f(x) في 2،  
27	كماهو.y هي 2 لأنه في التمدد الأفقي يبقى الإحداثي h(x)، وَ g(x)القيمة الصغرى للاقتران لكل من
28	يتقاطع منحنى كل من g(x)، وَ h(x) مع المحور y في النقطة (0, 11) لأنه عند ضرب الإحداثي x لهذه النقطة وهو 0 في2 أو في $\frac{1}{2}$ يكون الناتج 0 فتكون صورة النقطة (0, 11) بالتمدد الأفقي (0, 11) في النقطة yتقطع المحور f(x), g(x), h(x) ، أي أن منحنيات(0, 11) هي نفسها.
29	تمدد (توسيع) رأسي معامله 2.9، وانسحاب إلى الأعلى بمقدار 20.1 وحدة.
30	متوسط الطول للاطفال بعمر 5 سنوات هو h(60) = h(5×12) $h(60) = 2.9\sqrt{60} + 20.1 \approx 42.6$ in
31	يمثل متوسط أطوال الأطفال الذكور عند الولادة.20.1الثابت

32	ضُرب الإحداثي x لكل نقطة في $\frac{1}{3}$ 
33	ضُرب الإحداثي x لكل نقطة في 3 
34	a) $h(x) = \sqrt{x} + 3$ b) $g(x) = \sqrt{x+5}$ c) $r(x) = \sqrt{x+5} + 2$ $p(x) = \sqrt{x-3} + 1$ e) $q(x) = \sqrt{x-1} - 4$
35	منحنى C(x) ناتج عن تضييق رأسي معامله $\frac{1}{2}$ لمنحنى T(x) متبوعًا بانسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.
36	منحنى g(x) ناتج عن انعكاس f(x) حول المحور x وتضييق رأسي وانسحاب بمقدار وحدة واحدة للأسفل. فتكون قاعدته $g(x) = -c\sqrt{16-x^2} - 1$، وبتعويض إحداثيي النقطة (2-, 0) $g(0) = -c\sqrt{16-0^2} - 1$ $-2 = -c(4) - 1 \rightarrow c = \frac{1}{4}$ $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{16-x^2} - 1$
37	(a-, b) لأن منحنى f(-x) هو انعكاس لمنحنى f(x) حول المحور y.
38	(a, 2b) لأن منحنى 2f(x) هو توسيع لمنحنى f(x) معامله 2، لذلك يُضرب الإحداثي y في 2

39

(-a+3, b) لأن منحنى f(3-x) هو انعكاس حول المحور y لمنحنى f(x) ثم انسحاب إلى اليمين بمقدار 3 وحدات.

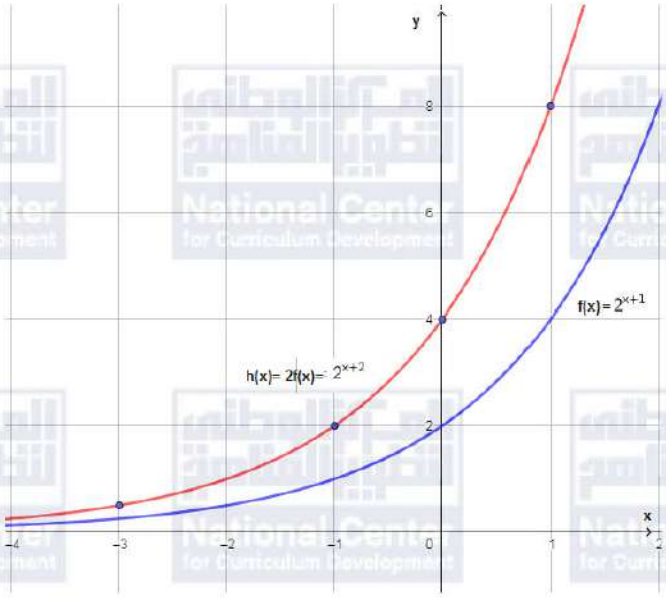
40



يُضرب كل إحداثي x على منحنى f(x) في $\frac{1}{2}$ فتتحول النقطة (1, 4) إلى $(\frac{1}{2}, 4)$، وتتحول (1 ,1-) إلى $(-\frac{1}{2}, 1)$، والنقطة (0, 2) تبقى (0, 2)

وتستبدل x بـ 2x في قاعدة الاقتران f(x)، فتكون قاعدة g(x) هي: $g(x)= f(2x) = 2^{2x+1}$

41



يُضرب كل إحداثي y في 2 فتكون قاعدة h(x) هي:

$h(x) =2(2^{x+1}) = 2^{x+2}$

الدرس الرابع: النهايات والاتصال

مسألة اليوم صفحة 90

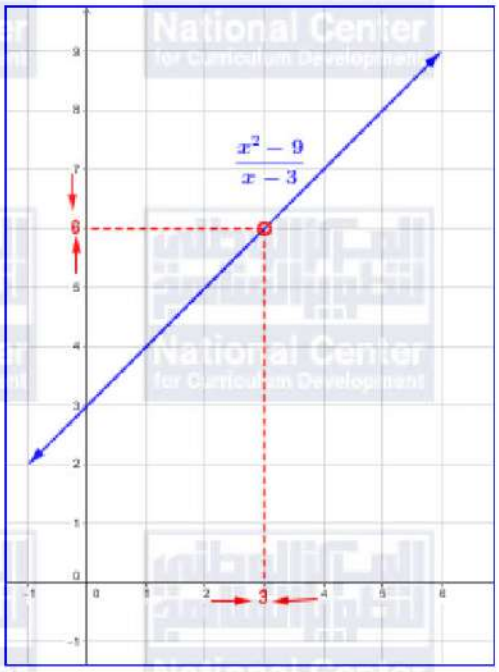
تقترب المساحة المحصورة بين الدائرة والمضلع من الصفر

أتحقق من فهمي صفحة 94

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

a

الحل بيانيا



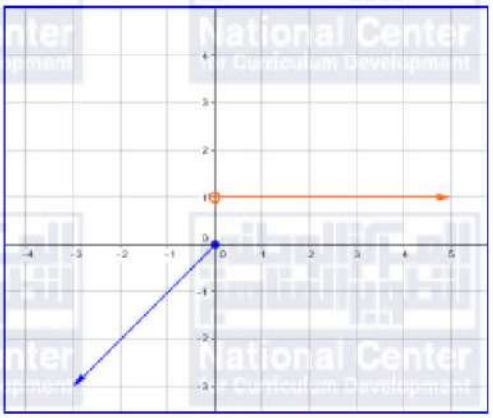
الحل عدديا

	اليسار ⟶			3	⟵ اليمين		
x	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1
	اليسار ⟶			6	⟵ اليمين		

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

الحل بيانيا



b

الحل عدديا:

0 اليسار

اليمين

x	-0.1	-0.01	-0.001		0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001		1	1	1

0 اليسار

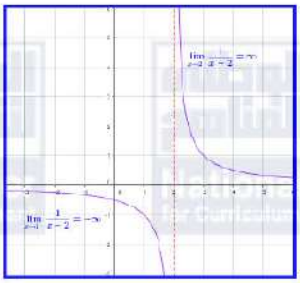
اليمين 1

$\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

أتحقق من فهمي صفحة 96

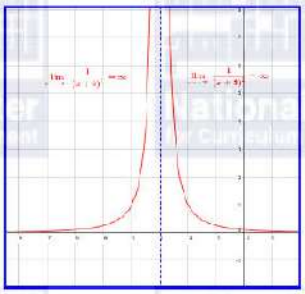
$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$ غير موجودة

a



b

$$\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^2}=\infty$$



أتحقق من فهمي صفحة 98

a

$$\lim_{x\to 1}(2x^3+3x^2-4)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(2x^3+\lim_{x\to 1}3x^2-\lim_{x\to 1}4\right)$$
$$=2\left(\lim_{x\to 1}x\right)^3+3\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2-4$$
$$=2(1)^3+3(1)^2-4=1$$

b

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+3x^2}}{3x-2}=\frac{\lim_{x\to 4}\sqrt{1+3(x)^2}}{\lim_{x\to 4}3(x)-2}$$
$$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to 4}1+3\left(\lim_{x\to 4}x\right)^2}}{3\lim_{x\to 4}x-\lim_{x\to 4}2}=\frac{\sqrt{1+3(4)^2}}{3(4)-2}$$
$$=\frac{\sqrt{49}}{10}=\frac{7}{10}$$

أتحقق من فهمي صفحة 99

a

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+4)$$
$$=3(2)^2-5(2)+4=6$$

b

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{1-4x^2}$$

العدد 1- لايقع ضمن مجال الاقتران فلذلك لايمكن إيجاد النهاية بالتعويض المباشر

c	$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x-6}{x^2-2}=\frac{3^3-5(3)-6}{3^2-2}=\frac{6}{7}$
d	$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8$
أتحقق من فهمي صفحة 101	
a	$\lim_{x\to 0}\frac{7x-x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(7-x)}{x}$ $=\lim_{x\to 0}(7-x)=7$
b	$\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}\times\frac{2+\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{4-(x+4)}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2+\sqrt{x+4}}=\frac{-1}{4}$
c	$\lim_{x\to 5^+}\frac{x-5}{x-5}=1$ $\lim_{x\to 5^-}\frac{5-x}{x-5}=-1$ $\Rightarrow \lim_{x\to 5}\frac{\lvert x-5\rvert}{x-5}$ غير موجودة
أتحقق من فهمي صفحة 103	
a	الاقتران متصل عند $x=1$ لأن: $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=6$
b	الاقتران غير متصل عند $x=5$ لأن الاقتران غير معرف عند $x=5$

c

$h(3) = 5 - 3 = 2$

$\lim_{x \to 3^+} h(x) = 2$

$\lim_{x \to 3^-} h(x) = 2$

$\Rightarrow \lim_{x \to 3} h(x) = 2$

$\Rightarrow h(3) = \lim_{x \to 3} h(x) = 2$

إذن الاقتران متصل عند $x = 3$

d

$p(5) = 10$

$$\lim_{x \to 5} p(x) = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x - 5}$$

$$= \lim_{x \to 5} (x + 5) = 10$$

$\Rightarrow p(5) = \lim_{x \to 5} p(x) = 10$

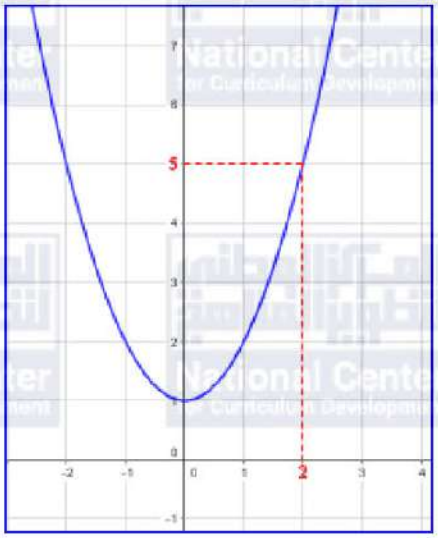
إذن الاقتران متصل عند $x = 5$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 104

$\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$

بيانيا

1



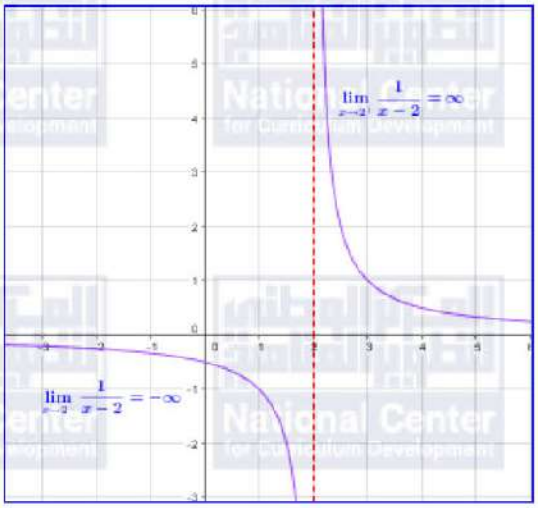
عدديا:

				2			
	اليسار ←				→ اليمين		
x	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1
$f(x)$	4.61	4.96	4.996		5.004	5.04	5.41
	اليسار ←			5	→ اليمين		

$\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$

2

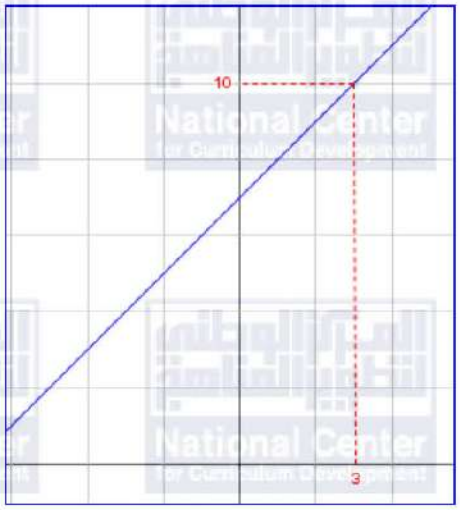
$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$ غير موجودة



3

$$\lim_{x\to 3}(x+7)=10$$

بيانيا

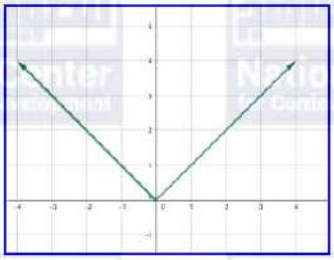


عدديا:

	اليسار ←			3	→ اليمين		
x	2.9	2.99	2.99		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	9.7	9.99	9.999		10.001	10.01	10.1
	اليسار ←			10	→ اليمين		

4) $\lim_{x\to 0}|x| = 0$

بيانيا

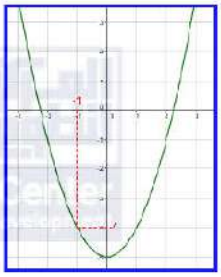


4

	اليمين ←			0	→ اليسار		
x	0.1	0.01	0.001		-0.001	-0.01	-0.1
$f(x)$	0.1	0.01	0.001		-0.001	-0.01	-0.1
	اليمين ←			0	→ اليسار		

$\lim_{x\to -1}(x^2 - 5) = -4$

بيانيا:



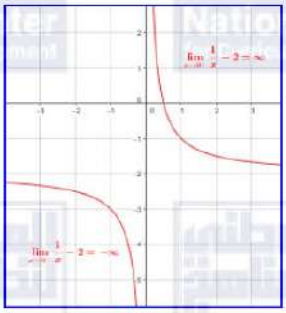
5

عدديا:

	اليمين ←			-1	→ اليسار		
x	-0.9	-0.99	-0.999		-1.001	-1.01	-1.1
$f(x)$	-4.2	-4.02	-4.002		-3.99	-3.97	-3.79
	اليمين ←			-4	→ اليسار		

6

6) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-2\right)$ غير موجودة

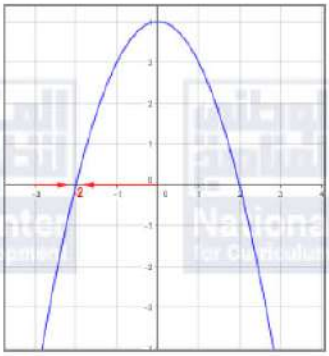


	اليمين ←			0	اليسار →		
x	0.01	0.001	0.0001		-0.0001	-0.001	-0.01
$f(x)$	98	998	9998		-9998	-998	-98
	اليمين ∞ ←			-∞	اليسار →		

7

7) $\lim_{x\to -2}(4-x^2)=0$

بيانيا:

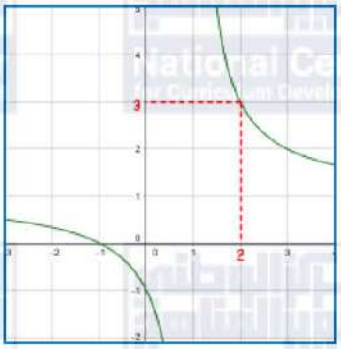


	اليمين ←			-2	اليسار →		
x	-1.9	-1.99	-1.999		-2.001	-2.01	-2.1
$f(x)$	0.39	0.039	0.0039		-0.004	-0.04	-0.41
	اليمين ←			0	اليسار →		

8

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=3$

بيانيا:

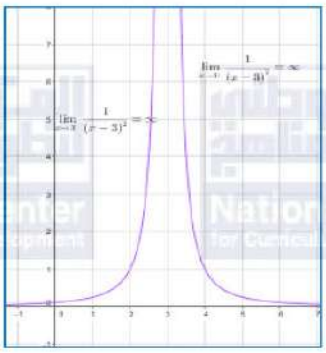


	اليسار ←			2	→ اليمين		
x	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.22	3.02	3.002		2.99	2.98	2.81
	اليسار ←			3	→ اليمين		

9

9) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty$

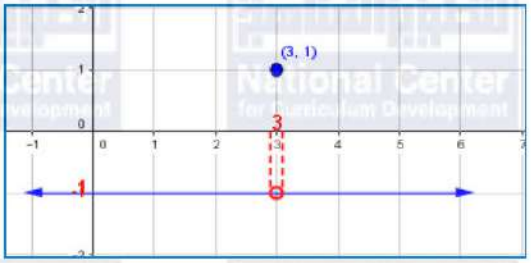
بيانيا:



	اليسار ←			3	→ مين		
x	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100
	اليسار ←			∞	→ اليمين		

10) $\lim_{x\to 3} f(x) = -1$

بيانيا:



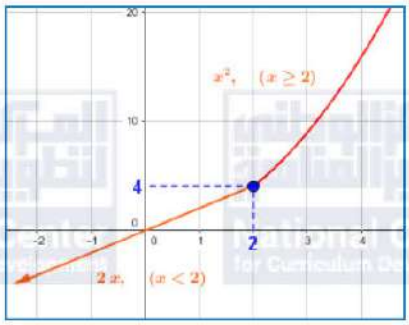
10

عدديا:

	اليسار ←			3		→ اليمين	
x	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	-1	-1	-1		-1	-1	-1
	اليسار ←			-1		→ اليمين	

11) $\lim_{x\to 2} h(x) = 4$

بيانيا:



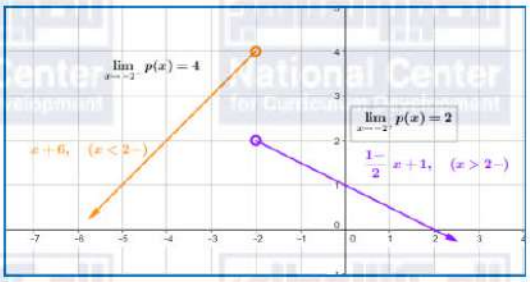
11

	اليسار ←			2		→	
x	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.8	3.98	3.998		4.004	4.04	4.4
	اليسار ←			4		→ اليمين	

12

12) $\lim_{x\to -2} p(x)$ غير موجودة

بيانيا:

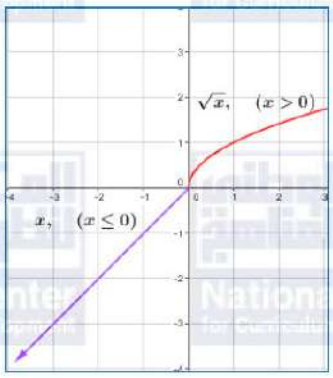


	اليسار ←			-2		→ اليمين	
x	-2.1	-2.01	-2.001		-1.999	-1.99	-1.9
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		1.999	1.995	1.95
	4 اليسار ←					→ اليمين 2	

13

13) $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

بيانيا:



	اليسار ←			0		→ اليمين	
x	-0.1	-0.01	-0.001		0.0001	0.001	0.1
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001		0.01	0.031	0.3
	0 اليسار ←					→ اليمين	

14	$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$
15	$\lim_{x\to -2} f(x)$ غير موجودة
16	$\lim_{x\to 1} h(x) = -1$
17	$\lim_{x\to 2} h(x)$ غير موجودة
18	$\lim_{x\to 3} h(x) = 2$
19	19) $\lim_{x\to 3}(x^2 - 4x + 7) = 9 - 12 + 7 = 4$
20	20) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{9-16}{3-4} = \frac{-7}{-1} = 7$
21	21) $\lim_{x\to 9} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$
22	22) $\lim_{x\to 2\pi} (x^3 + \pi x - 5\pi^3)$ $= 8\pi^3 + 2\pi^2 - 5\pi^3$ $= 3\pi^3 + 2\pi^2$
23	23) $\lim_{x\to -3} \sqrt{\frac{x-3}{2x+4}} = \sqrt{\frac{-6}{-2}} = \sqrt{3}$
24	24) $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{x^2 + 11}$ $= \sqrt[3]{16 + 11} = 3$
25	25) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}$ $= \lim_{x\to 3}(x^2 + 3x + 9) = 27$

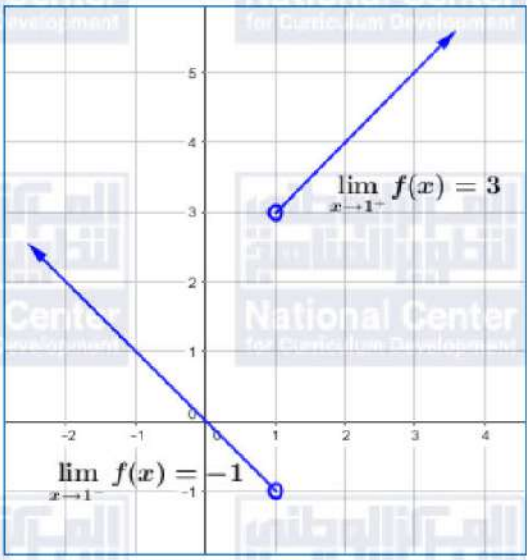
26	26) $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{x+1}$ $= \lim_{x\to -1}\frac{(2x+3)(x+1)}{x+1}$ $= \lim_{x\to -1}(2x+3) = 1$
27	27) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\lvert x-2\rvert} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{\lvert x-2\rvert}$ $\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}(x+1) = 3$ $\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+1)(x-2)}{2-x} = \lim_{x\to 2^+}(-1)(x+1) = -3$ $\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\lvert x-2\rvert}$ غير موجودة
28	28) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ $= \lim_{x\to 3^+}(3x-7) = 2$ $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x-1) = 2$ $\Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = 2$
29	29) $\lim_{t\to 4}\frac{\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}}{t-4} = \lim_{t\to 4}\frac{\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}}{t-4}\times\frac{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}}$ $= \lim_{t\to 4}\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{2}}{(t-4)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{t\to 4}\frac{4-t}{4t}\times\frac{1}{(t-4)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{t\to 4}\frac{-1}{4t\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1}{16}$
30	30) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ $= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} = \lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \frac{1}{4}$

31	31) $f(0)=0 \Rightarrow c=0$ بما أن الاقتران كثير حدود فإن $\lim_{x\to 1} f(x)=5=f(1) \Rightarrow a(1)^2+b(1)+0=5$ $\Rightarrow a+b=5$ $\lim_{x\to -2} f(x)=8=f(-2)$ $\Rightarrow a(-2)^2+b(-2)+0=8$ $\Rightarrow 4a-2b=8$ بحل نظام المعادلات الخطية الناتج بالحذف أو التعويض نجد ان $a=3 \ , b=2$
32	32) $\lim_{x\to 2}\big(f(x)+g(x)\big)$ $=2+0=2$
33	33) $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة
34	34) $\lim_{x\to 1}\sqrt{3+f(x)}$ $=\sqrt{3+1}=2$
35	35) $\lim_{x\to 0}(f(x)\times g(x))=0\times\lim_{x\to 0}g(x)=0$
36	36) متصل لأنه كثير حدود
37	37) $x=-5$ متصل لأن الاقتران نسبي معرف عند

38	38) $h(0) = 3$ $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 3$ $\lim_{x\to 0^-} h(x) = 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0} h(x)$ غير موجودة إذن الاقتران غير متصل عند $x = 0$
39	39) الاقتران متصل عند $x = 3$ إذن $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) \Rightarrow 3 + 3 = 2 + \sqrt{k}$ $\Rightarrow 4 = \sqrt{k} \Rightarrow k = 16$
40	40) الاقتران متصل عند $t = 60$ إذن $\lim_{t\to 60^+} T(t) = \lim_{t\to 60^-} T(t)$ $\Rightarrow k - 3(60) = 2(60)$ $\Rightarrow k = 300$
41	41) حتى يكون التبريد في الفرن بالتدريج وليس بشكل مفاجئ كما $t = 60$ يجب إن يكون الاقتران متصل عند أن الحرارة لا تنقطع عن الفرض حتى يكون فجوة في درجة الحرارة قبل 60 وبعدها

42) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}$ غير موجودة

بيانيا:



جبريا:

42

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-1-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} (x+2) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x+1-1}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{1-x} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|} \neq \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}$ غير موجودة

43

بما أن المقام صفر والنهاية موجودة إذن البسط صفر

$$\sqrt{m(0)+b}-3=0$$

$$\sqrt{b}=3 \Rightarrow b=9$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{mx+b}-3}{x}\times\frac{\sqrt{mx+b}+3}{\sqrt{mx+b}+3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{mx+b-9}{x\left(\sqrt{mx+b}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{mx+9-9}{x\left(\sqrt{mx+9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{m}{\left(\sqrt{mx+9}+3\right)}$$

$$=\frac{m}{3+3}=1 \Rightarrow m=6$$

44

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{a}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-a(x-1)}{(x-1)(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-ax+a}{(x-1)(x^2-1)}$$

بتحليل البسط

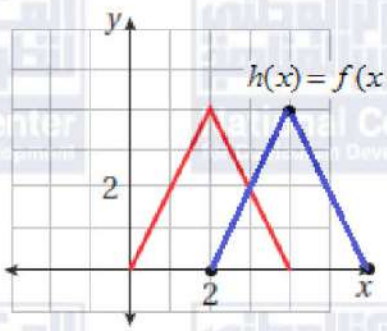
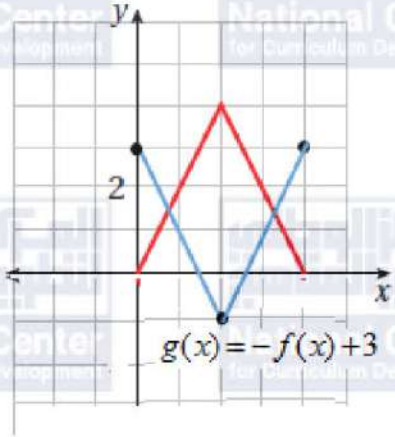
$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-a+1)}{(x-1)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-a+1}{(x^2-1)}$$

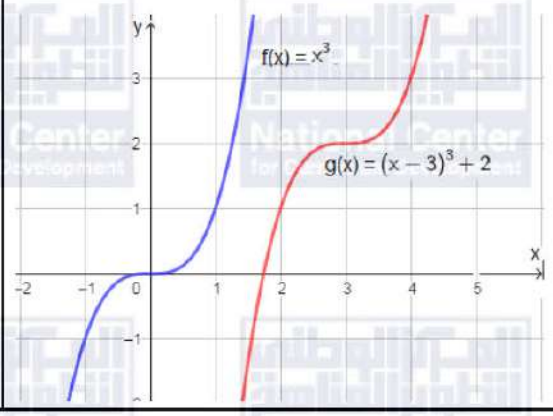
بما أن المقام عند $x=1$ صفر والنهاية موجودة إذن البسط عند $x=1$ يجب أن يكون صفر

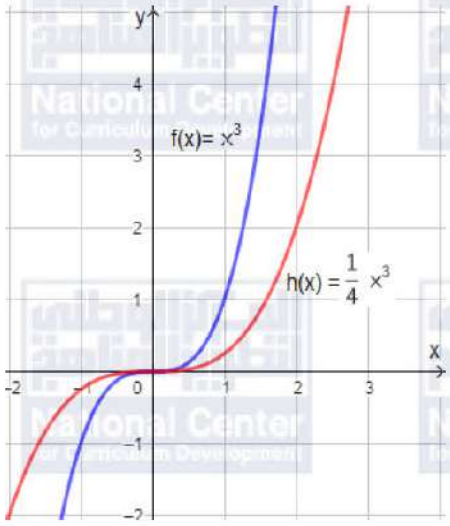
$$\Rightarrow 1-a+1=0 \Rightarrow a=2$$

اختبار نهاية الوحدة الثانية

1	a
2	d
3	c
4	d
5	b
6	$(x+1)(x-4)(3x-1)$
7	$(x-2)(x+3)(2x-1)(4x-1)$
8	$x=-1,\ x=2,\ x=3$
9	$x=1,\ x=-3,\ x=-9$
10	$m=5$
11	$\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x+3}$
12	$\frac{-6}{x}+\frac{11}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$
13	$3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}$
14	$\frac{-1}{2x}-\frac{1}{x^2}+\frac{x+10}{2(x^2+2)}$

15	
16	
17	$\frac{1}{6}$
18	$\frac{3}{5}$
19	غير موجودة
20	$\frac{-2}{3}$
21	وتساوي f(5)13 متصل، لأن النهاية تساوي قيمة
22	غير متصل لأنه غير معرف عند 0

23	غير متصل لأن النهاية غير موجودة
24	عرض الخزان 2 m، وطوله 5 m، وارتفاعه 3 m مساحة الحديد اللازم لصنعه $62\ m^2$
25	غير موجودة
26	1
27	غير موجودة
28	غير موجودة
29	1
30	0
31	

32	
33	c
34	a
35	d

الوحدة الثالثة: الاشتقاق

الدرس الأول: اشتقاق اقتران القوة

مسألة اليوم صفحة 110

$s(t) = 100 + 5t^2$

$v(t) = 10t$

$v(12) = 10(12) = 120$

أتحقق من فهمي صفحة 112

$f(x) = 4x^2 + 1$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(-1+h)^2 + 1 - 5}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(1 - 2h + h^2) - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 - 8h + 4h^2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-8h + 4h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-8 + 4h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-8 + 4h)$$

$$= -8$$

أتحقق من فهمي صفحة 112

$f(x) = 8 - x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{8 - (x+h)^2 - 8 + x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{8 - (x^2 + 2xh + h^2) - 8 + x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{8 - x^2 - 2xh - h^2 - 8 + x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x - h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (-2x - h)$$
$$= -2x$$

أتحقق من فهمي صفحة 113

a

$$y = x^{-11}$$
$$\frac{dy}{dx} = -11x^{-12}$$

b

$$y = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$$
$$\frac{dy}{dx} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

c

$$y = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 114

a	$y = \sqrt{x} + \frac{4}{x^2}$ $= x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}}$ $= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}$
b	$y = \frac{x^5 - 8x^6}{4x}$ $= \frac{x^5}{4x} - \frac{8x^6}{4x}$ $= \frac{1}{4}x^4 - 2x^5$ $\frac{dy}{dx} = x^3 - 10x^4$

أتحقق من فهمي صفحة 115

$s(t) = t^3 - \sqrt{t}$

$= t^3 - t^{\frac{1}{2}}$

$v(t) = 3t^2 - \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$

$= 3t^2 - \frac{1}{2t^2}$

$v(4) = 3(4)^2 - \frac{1}{2(4)^2} \approx 48\ m/s$

أتحقق من فهمي صفحة 116

$$y = 8x - \frac{1}{x} = 8x - x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8 + x^{-2} = 8 + \frac{1}{x^2}$$

$$m_{\text{المماس}} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0.25} = 8 + \frac{1}{0.25^2} = 24$$

$$y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$$

$$y - -2 = 24(x - 0.25)$$

$$y + 2 = 24x - 6$$

$y = 24x - 8$ معادلة المماس

$$m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = \frac{-1}{24}$$

$$y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$$

$$y - -2 = \frac{-1}{24}(x - 0.25)$$

$$y + 2 = \frac{-1}{24}x + \frac{1}{96}$$

$y = \frac{-1}{24}x - \frac{191}{96}$ معادلة العمودي

أتدرب وأحل المسائل صفحة 117

1

$$y = x^2 + 3x + 1$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2+3(3+h)+1-19}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2+9+3h-18}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+9h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(h+9)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(h+9)$$

$$= 9$$

2

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(2+h)^2+1}-\frac{1}{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{5-(2+h)^2-1}{5h((2+h)^2+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h^2-4h}{5h((2+h)^2+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(-h-4)}{5h((2+h)^2+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h-4}{5((2+h)^2+1)}$$

$$= \frac{-4}{25}$$

3	$y = (2x+3)^2$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=-1} = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ $= \lim_{h\to 0}\frac{(2(-1+h)+3)^2-1}{h}$ $= \lim_{h\to 0}\frac{(2h+1)^2-1}{h}$ $= \lim_{h\to 0}\frac{4h^2+4h+1-1}{h}$ $= \lim_{h\to 0}\frac{4h^2+4h}{h}$ $= \lim_{h\to 0}\frac{h(4h+4)}{h}$ $= \lim_{h\to 0}(4h+4)$ $= 4$

4

$$f(x)=\frac{x-3}{x^2}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(x+h)-3}{(x+h)^2}-\frac{x-3}{x^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2(x+h-3)-(x-3)(x+h)^2}{hx^2(x+h)^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+x^2h-3x^2-(x-3)(x^2+2xh+h^2)}{hx^2(x+h)^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+x^2h-3x^2-x^3-2x^2h-xh^2+3x^2+6xh+3h^2}{hx^2(x+h)^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-x^2h-xh^2+6xh+3h^2}{hx^2(x+h)^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(-x^2-xh+6x+3h)}{hx^2(x+h)^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-x^2-xh+6x+3h}{x^2(x+h)^2}$$

$$=\frac{-x^2+6x}{x^4}=\frac{-x+6}{x^3}$$

5	$f(x) = x(x+2) = x^2 + 2x$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - x^2 - 2x}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - x^2 - 2x}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x + h + 2)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} (2x + h + 2)$ $= 2x + 2$
6	$f(x) = \frac{1}{x-1}$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h-1} - \frac{1}{x-1}}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{x - 1 - x - h + 1}{h(x-1)(x+h-1)}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x-1)(x+h-1)}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x-1)(x+h-1)}$ $= \frac{-1}{(x-1)^2}$

7	$y = 10x - \frac{6}{\sqrt{x}}$ $= 10x - 6x^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = 10 + 3x^{-\frac{3}{2}}$ $= 10 + \frac{3}{\sqrt{x^3}}$
8	$y = x^8 - x^{-8}$ $\frac{dy}{dx} = 8x^7 + 8x^{-9}$ $= 8x^7 + \frac{8}{x^9}$
9	$y = 9x^{-2} + 3\sqrt{x}$ $= 9x^{-2} + 3x^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = -18x^{-3} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $= -\frac{18}{x^3} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
10	$y = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$ $= \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$ $= x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = -x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ $= \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

11	$y = \frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2} - 3$ $= 6x^{-3} + 2x^{-2} - 3$ $\frac{dy}{dx} = -18x^{-4} - 4x^{-3}$ $= -\frac{18}{x^4} - \frac{4}{x^3}$
12	$y = 20x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 17$ $= 20x^5 + 3x^{\frac{1}{3}} + 17$ $\frac{dy}{dx} = 100x^4 + x^{-\frac{2}{3}}$ $= 100x^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
13	$y = x^2 - x$ $x = 4 \Rightarrow y = (4)^2 - 4 = 12 \quad \Rightarrow$ نقطة التماس $(4,12)$ $\frac{dy}{dx} = 2x - 1$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=4} = 2(4) - 1 = 7$ $y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$ $y - 12 = 7(x - 4)$ $y - 12 = 7x - 28$ $y = 7x - 16$ معادلة المماس

14	$m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = \frac{-1}{7}$ $y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$ $y - 12 = \frac{-1}{7}(x - 4)$ $y - 12 = \frac{-1}{7}x + \frac{4}{7}$ $y = \frac{-1}{7}x + \frac{88}{7}$ معادلة العمودي
15	$f(x) = \frac{24}{x} = 24x^{-1}$ $f'(x) = -24x^{-2} = -\frac{24}{x^2}$
16	ميل المماس عند النقطة (x, y) التي تقع على منحنى الاقتران f هو $f'(x)$ وبما أن المقدار $-\frac{24}{x^2}$ سالب دائمًا، إذن، ميل المماس سالب دائمًا عند أي نقطة.
17	$y = 6 \Longrightarrow 6 = \frac{24}{x} \Longrightarrow x = 4 \Longrightarrow (4,6)$ نقطة التماس $m_{\text{المماس}} = f'(4) = -\frac{24}{(4)^2} = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$ $m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = \frac{2}{3}$ $y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$ $y - 6 = \frac{2}{3}(x - 4)$ $y - 6 = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$ $y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$ معادلة العمودي

18	$y = (x-3)(x-5) = x^2 - 8x + 15$ $y = 0 \Longrightarrow (x-3)(x-5) = 0 \Longrightarrow x = 3\,, x = 5$ $(3,0), (5,0)$ x نقطتا التقاطع مع المحور $\frac{dy}{dx} = 2x - 8$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=3} = 2(3) - 8 = -2$ $y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$ $y - 0 = -2(x-4)$ $y = -2x + 8$ معادلة المماس عند النقطة $(3,0)$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=5} = 2(5) - 8 = 2$ $y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$ $y - 0 = 2(x-5)$ $y = 2x - 10$ معادلة المماس عند النقطة $(5,0)$
19	$s = 10\sqrt{t} + t + \pi = 10t^{-\frac{1}{2}} + t + \pi$ $v(t) = s'(t) = -5t^{-\frac{3}{2}} + 1$ $v(1) = -5 + 1 = -4\ m/s$
20	$h = 2t^2 - t^3$ $v(t) = h'(t) = 4t - 3t^2$ $v(10) = 4(10) - 3(10)^2 = -260\ m/s$
21	$y = \sqrt[3]{8x} = 2x^{\frac{1}{3}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=125} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(125)^2}} = \frac{2}{75}$

22	$C(x) = \sqrt[3]{8x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{8x} \Rightarrow y^3 = 8x \Rightarrow \frac{1}{8}y^3 = x \Rightarrow D(x) = \frac{1}{8}x^3$ $P(125,10) \Rightarrow Q(10,125)$ $D(x) = \frac{1}{8}x^3 \Rightarrow D'(x) = \frac{3}{8}x^2$ $D'(10) = \frac{3}{8}(10)^2 = \frac{75}{2}$ $C'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow C'(125) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(125)^2}} = \frac{2}{75}$ $\Rightarrow D'(10) = \frac{1}{C'(125)}$
23	$y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{1}{2}x + 2x^{-1}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - 2x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{(2)^2} = 0$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=-2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{(-2)^2} = 0$
24	$\lim_{x\to\infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$

25	$y = x^2 + 4x$ $x = k \Rightarrow y = k^2 + 4k \Rightarrow (k, k^2 + 4k)$ نقطة التماس $\frac{dy}{dx} = 2x + 4$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=k} = 2k + 4$ $y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$ $y - k^2 - 4k = (2k + 4)(x - k)$ $y - k^2 - 4k = (2k + 4)x - 2k^2 - 4k$ $y = (2k + 4)x - k^2$ $y - (2k + 4)x + k^2 = 0$ معادلة المماس
26	$m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = \frac{-1}{2k + 4}$ $y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$ $y - k^2 - 4k = \frac{-1}{2k + 4}(x - k)$ $y - k^2 - 4k = \frac{-1}{2k + 4}x + \frac{k}{2k + 4}$ $y = \frac{-1}{2k + 4}x + \frac{k}{2k + 4} + k^2 + 4k$ $4y = \frac{-4}{2k + 4}x + \frac{4k}{2k + 4} + 4k^2 + 16k$ $4y + \frac{4}{2k + 4}x = \frac{4k}{2k + 4} + 4k^2 + 16k$ $\frac{4}{2k + 4} = 1 \Rightarrow k = 0$

27	$OA = a^2$ لإيجاد OT ينبغي إيجاد معادلة مماس المنحنى عند النقطة P $y = x^2 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=a} = 2a$ $y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$ $y - a^2 = 2a(x - a)$ $y - a^2 = 2ax - 2a^2 \quad \Longrightarrow y = 2ax - a^2$ معادلة المماس النقطة T تقع المحور y إذن $T(0, y_T)$ ، وهي تقع أيضًا على المماس، إذن $y_T = 2ax_T - a^2 \Longrightarrow x_T = 2a(0) - a^2 = -a^2 \Longrightarrow T(0, -a^2)$ $OT = 0 - (-a^2) = a^2 \quad \Longrightarrow OT = OA$
28	$A(0, a^2)$ لإيجاد النقطة N ينبغي أولًا إيجاد معادلة العمودي على المماس عند النقطة P $m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = \frac{-1}{2a}$ $y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$ $y - a^2 = \frac{-1}{2a}(x - a)$ $y - a^2 = \frac{-1}{2a}x + \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow y = \frac{-1}{2a}x + \frac{1}{2} + a^2$ معادلة العمودي النقطة N تقع المحور y إذن $N(0, y_N)$ ، وهي تقع أيضًا على العمودي، إذن: $y_N = \frac{-1}{2a}(0) + \frac{1}{2} + a^2 = \frac{1}{2} + a^2 \quad \Longrightarrow N\left(0, \frac{1}{2} + a^2\right)$ $AN = \frac{1}{2} + a^2 - a^2 = \frac{1}{2}$

الدرس الثاني: قاعدة السلسلة

مسألة اليوم صفحة 119

معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 0.5$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=2.8}$

العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة ونصف قطرها: $A = 4\pi r^2$

$$\frac{dA}{dr} = 8\pi r$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt}$$

$$= 8\pi(2.8)(0.5)$$

$$= 11.2\pi$$

إذن تتزايد مساحة سطح الفقاعة بمعدل $11.2\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطرها 2.8 cm

أتحقق من فهمي صفحة 121

a

$$y = (2x^4 - 8)^{\frac{5}{3}}$$

$$y = u^{\frac{5}{3}}, \quad u = 2x^4 - 8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{5}{3}u^{\frac{2}{3}} \times 8x^3$$

$$= \frac{40}{3}x^3(2x^4 - 8)^{\frac{2}{3}}$$

b

$$y = \frac{13}{(x^2 - 8)^7} = 13(x^2 - 8)^{-7}$$

$$y = 13u^{-7}, \quad u = x^2 - 8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= -91u^{-8} \times 2x$$

$$= -182x(x^2 - 8)^{-8}$$

$$= -\frac{182x}{(x^2 - 8)^8}$$

	أتحقق من فهمي صفحة 122
a	$f(x) = \sqrt[7]{x^4+1} = (x^4+1)^{\frac{1}{7}}$ $f'(x) = \frac{1}{7}(x^4+1)^{-\frac{6}{7}} \times 4x^3 = \frac{4x^3}{7\sqrt[7]{(x^4+1)^6}}$ $f'(-1) = \frac{4(-1)^3}{7\sqrt[7]{((-1)^4+1)^6}} = \frac{-4}{7\sqrt[7]{64}}$
b	$y = (2x-5)^{\frac{2}{3}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(2x-5)^{-\frac{1}{3}} \times 2 = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x-5}}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = \frac{4}{3\sqrt[3]{2(0)-5}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{-5}}$
	أتحقق من فهمي صفحة 123
a	$y = (4x+9)^7$ $\frac{dy}{dx} = 7(4x+9)^6 \times 4$ $= 28(4x+9)^6$
b	$y = \sqrt[3]{1-10x}$ $= (1-10x)^{\frac{1}{3}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(1-10x)^{-\frac{2}{3}} \times -10$ $= -\frac{10}{3}(1-10x)^{-\frac{2}{3}}$ $= -\frac{10}{3\sqrt[3]{(1-10x)^2}}$
c	$y = \frac{1}{2x-7} = (2x-7)^{-1}$ $\frac{dy}{dx} = -(2x-7)^{-2} \times 2 = -\frac{2}{(2x-7)^2}$

أتحقق من فهمي صفحة 124

معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 30$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=4}$

العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

a

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt}$$

$$30 = 4\pi(4)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{15}{32\pi}$$

إذن يزداد طول نصف قطر البالون بمعدل $\frac{15}{32\pi}\ cm$ عندما يكون طول نصف قطره 4 cm

b

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt}$$

$$30 = 4\pi(8)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{15}{128\pi}$$

إذن يزداد طول نصف قطر البالون بمعدل $\frac{15}{128\pi}\ cm$ عندما يكون طول نصف قطره 8 cm

أتدرب وأحل المسائل صفحة 125

1

$$f(x) = (4x+2)^2$$

$$f'(x) = 2(4x+2) \times 4 = 8(4x+2)$$

2

$$y = (8-x)^{10}$$

$$\frac{dy}{dx} = 10(8-x)^9 \times -1 = -10(8-x)^9$$

3

$$g(x) = (1+3x^2)^5$$

$$g'(x) = 5(1+3x^2)^4 \times 6x = 30x(1+3x^2)^4$$

4	$y = (6x - 5x^2)^{-8}$ $\frac{dy}{dx} = -8(6x - 5x^2)^{-9} \times (6 - 10x) = -8(6 - 10x)(6x - 5x^2)^{-9}$
5	$y = (\pi - x^2)^3$ $\frac{dy}{dx} = 3(\pi - x^2)^2 \times -2x = -6x(\pi - x^2)^2$
6	$h(x) = \sqrt{6x - 1} = (6x - 1)^{\frac{1}{2}}$ $h'(x) = \frac{1}{2}(6x - 1)^{-\frac{1}{2}} \times 6 = \frac{3}{\sqrt{6x - 1}}$
7	$h(x) = \sqrt{(2 - x)^5} + 16 = (2 - x)^{\frac{5}{2}} + 16$ $h'(x) = \frac{5}{2}(2 - x)^{\frac{3}{2}} \times -1 = -\frac{5}{2\sqrt{(2 - x)^3}}$ $h'(-4) = -\frac{5}{2\sqrt{(2 + 4)^3}} = -\frac{5}{12\sqrt{6}}$
8	$y = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = (\sqrt{x} - 1)^{-1} = \left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)^{-1}$ $\frac{dy}{dx} = -\left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)^{-2} \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=16} = -\frac{1}{2\sqrt{16}(\sqrt{16} - 1)^2} = -\frac{1}{72}$
9	$y = \frac{2}{(x^2 - 13)^{\frac{4}{7}}} = (x^2 - 13)^{-\frac{4}{7}}$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{7}(x^2 - 13)^{-\frac{11}{7}} \times 2x = -\frac{8}{7(x^2 - 13)^{\frac{11}{7}}}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=1} = -\frac{8}{7(1 - 13)^{\frac{11}{7}}} = -\frac{8}{7(-12)^{\frac{11}{7}}}$

10	$h(x) = 1 - \sqrt{x} = 1 - x^{\frac{1}{2}}$ $h'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $h'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = -1$
11	$y = \frac{20}{2+x} = 20(2+x)^{-1} \quad , x > -2$ $\frac{dy}{dx} = -20(2+x)^{-2} = -\frac{20}{(2+x)^2}$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = -\frac{20}{(2+2)^2} = -\frac{5}{4}$ $y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$ $y - 5 = -\frac{5}{4}(x-2)$ $y - 5 = -\frac{5}{4}x + \frac{10}{4} \quad \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{30}{4}$ معادلة المماس
12	$-\frac{20}{(2+x)^2} = -0.2 \Rightarrow (2+x)^2 = 400 \Rightarrow 2+x = 20 \Rightarrow x = 18 \ , x > -2$ $x = 18 \ \Rightarrow y = \frac{20}{2+18} = 1 \Rightarrow (18,1)$ النقطة هي

13	$y = \frac{20}{2+0} = 10 \Rightarrow (0,10)$ نقطة التقاطع مع المحور y هي $m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = \frac{-1}{-\frac{20}{(2+0)^2}} = \frac{1}{5}$ $y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$ $y - 10 = \frac{1}{5}(x - 0)$ $y - 10 = \frac{1}{5}x \Rightarrow y = \frac{1}{5}x + 10$ معادلة العمودي
14	$y = \sqrt{2x+5} = (2x+5)^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{2}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{y}$
15	$m_{\text{المماس}} = \frac{dy}{dx}\Big\vert_{x=2} = \frac{1}{\sqrt{2(2)+5}} = \frac{1}{3}$ $y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$ $y - 3 = \frac{1}{3}(x - 2)$ $y - 3 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ معادلة المماس $y = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} = 0 \Rightarrow x = -7$ $\Rightarrow (-7,0)$ النقطة التي يقطع عندها المماس المحور x
16	$y = \frac{600}{x^2+50} = 600(x^2+50)^{-1}$ $\frac{dy}{dx} = -600(x^2+50)^{-2} \times 2x = -\frac{1200x}{(x^2+50)^2}$ $\frac{dy}{dx}\Big\vert_{x=1} = -\frac{1200(1)}{(1+50)^2} = -\frac{400}{867}$

17	$m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=10} = -\frac{12000}{(100+50)^2} = -\frac{8}{15}$ $y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$ $y - 4 = -\frac{8}{15}(x - 10)$ $y - 4 = -\frac{8}{15}x + \frac{16}{3} \quad \Rightarrow y = -\frac{8}{15}x + \frac{28}{3}$ معادلة المماس
18	$f(x) = \sqrt{100 - x^2} = (100 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2}(100 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \times -2x = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$ $f'(-6) = -\frac{-6}{\sqrt{100 - 36}} = \frac{3}{4}$
19	$m_{\text{المماس}} = f'(-6) = \frac{3}{4}$ لنجد ميل المستقيم الواصل بين نقطة الأصل والنقطة P: $m_{\text{المستقيم}} = \frac{8 - 0}{-6 - 0} = -\frac{4}{3}$ $\frac{3}{4} \times -\frac{4}{3} = -1$ بما أن حاصل ضرب ميل المستقيم المذكور بميل مماس الاقتران عند النقطة P يساوي -1 فيكون هذا المستقيم عموديًا على هذا المماس.
20	$y = (2x^2 - 3x + 1)^5$ $= \big((2x - 1)(x - 1)\big)^5$ $\frac{dy}{dx} = 5(2x^2 - 3x + 1)^4 \times (4x - 3)$ $= 5(4x - 3)(2x - 1)^4(x - 1)^4$

21	$y = \sqrt{a+bx^2} = (a+bx^2)^{\frac{1}{2}} \quad , a, b > 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2bx$ $= \frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}} = b\left(\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}\right) = b\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{b}\frac{dy}{dx}$
22	معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = \frac{0.4L}{s} = 400cm^3/s$ معدل التغير المطلوب: $\frac{dh}{dt}$ العلاقة التي تربط بين حجم الخزان وارتفاعه: $V = \pi r^2 h = 3600\pi h$ $\frac{dV}{dh} = 3600\pi$ $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \times \frac{dh}{dt}$ $400 = 3600\pi \frac{dh}{dt}$ $\frac{dh}{dt} = \frac{400}{3600\pi} = \frac{1}{9\pi}$ إذن يزداد عمق الماء في الخزان بمعدل $\frac{1}{9\pi}\ cm/s$ عندما يكون ارتفاع الماء h cm

23	معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 50\ cm^3/s$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{x=5}$ العلاقة التي تربط بين مساحة سطح المكعب وطول ضلعه: $A = 4x^2$ $\frac{dA}{dx} = 8x$ $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx} \times \frac{dx}{dt}$ $= 8(5)\frac{dx}{dt}$ العلاقة التي تربط بين حجم المكعب وطول ضلعه: $V = x^3$ $\frac{dV}{dx} = 3x^2$ $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \times \frac{dx}{dt}$ $50 = 3(5)^2\frac{dx}{dt}$ $\frac{dx}{dt} = \frac{50}{3(5)^2} = \frac{2}{3}$ $\frac{dA}{dt} = 8(5)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{80}{3}$ إذن تزداد مساحة سطح المكعب بمعدل $\frac{80}{3}\ cm^3/s$ عندما يكون طول ضلعه 5 cm

المعطى:	$w = 0.05t + 8 \Rightarrow \frac{dw}{dt} = 0.05$
معدل التغير المطلوب:	$\left.\frac{du}{dt}\right\|_{w=64}$
العلاقة التي تربط بين w و u:	$u = 150\sqrt[3]{w^2} = 150w^{\frac{2}{3}}$
24	$\Rightarrow \frac{du}{dw} = 150 \times \frac{2}{3} w^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{\sqrt[3]{w}}$
	$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dw} \times \frac{dw}{dt}$
	$= \frac{10}{\sqrt[3]{w}} \times 0.05$
	$\Rightarrow \left.\frac{du}{dt}\right\|_{w=64} = \frac{10}{\sqrt[3]{64}} \times 0.05 = \frac{1}{8}$
معدل التغير المعطى:	$\frac{dV}{dt} = -0.6\ cm^3/s$
معدل التغير المطلوب:	$\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=2.5\ m=250\ cm}$
العلاقة التي تربط بين حجم البالون وطول نصف قطره:	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
25	$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$
	$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt}$
	$-0.6 = 4\pi(250)^2 \frac{dr}{dt}$
	$\frac{dr}{dt} = -\frac{4\pi(250)^2}{0.6} = -\frac{1250000}{3}\pi\ cm/s$

26	$y = \frac{a}{1+x^2} = a(1+x^2)^{-1} \quad , \quad a > 0$ لنجد أولًا معادلة مماس الاقتران عند $x = 1$ ، ثم نجد المقطع y لهذا المماس: $x = 1 \Rightarrow y = \frac{a}{1+1^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \left(1, \frac{a}{2}\right)$ نقطة التماس $\frac{dy}{dx} = -a(1+x^2)^{-2} \times 2x = \frac{-2ax}{(1+x^2)^2}$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=1} = \frac{-2a}{4} = -\frac{a}{2}$ $y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$ $y - \frac{a}{2} = -\frac{a}{2}(x-1)$ $y - \frac{a}{2} = -\frac{a}{2}x + \frac{a}{2} \quad \Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + a$ معادلة المماس $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{2}(0) + a \ = a$ ..... (1) ثانيًا، لنجد المقطع y لمنحنى الاقتران: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{1+0^2} = a$ ..... (2) نلاحظ من (1) و(2) أن مماس الاقتران عند $x = 1$ ومنحنى الاقتران، يقطعان المحور y عند النقطة نفسها.
27	$f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$ $u = x^2 + 4 \quad , \quad y = \frac{u-4}{u} = \frac{u}{u} - \frac{4}{u} = 1 - 4u^{-1}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 4u^{-2} \times 2x$ $= \frac{8x}{u^2} = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$ $f'(-1) = \frac{-8}{25}$

28

$y = (x^2 + x - 2)^3 + 3$

لنجد أولًا معادلة مماس الاقتران عند (1,3):

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 + x - 2)^2 \times (2x + 1) = (6x + 3)(x^2 + x - 2)^2$$

$$m_{\text{المماس}} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = 9(1 + 1 - 2)^2 = 0$$

$$y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$$

$$y - 3 = 0(x - 1)$$

$\Rightarrow y = 3$ معادلة المماس

لنجد ثانيًا، نقاط تقاطع هذا المماس مع منحنى الاقتران:

$$(x^2 + x - 2)^3 + 3 = 3 \implies (x^2 + x - 2)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \big((x - 1)(x + 2)\big)^3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-2} = (6(-2) + 3)((-2)^2 - 2 - 2)^2 = 0$$

إذن، يمس هذا المماس منحنى الاقتران عند $x = -2$, $x = 1$

29

معدل التغير المعطى: $\frac{dx}{dt} = 0.2\ cm/s$

معدل التغير المطلوب: $\frac{dh}{dt}\Big|_{x=h=10\ cm}$

العلاقة التي تربط بين حجم متوازي المستطيلات الذي قاعدته مربعة وارتفاعه: $1000 = x^2 h$

$$1000 = x^2 h \Rightarrow h = \frac{1000}{x^2} = 1000x^{-2}$$

$$\frac{dh}{dx} = -2000x^{-1} = -\frac{2000}{x}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

$$= -\frac{2000}{x} \times 0.2$$

$$\frac{dh}{dt}\Big|_{x=h=10\ cm} = -\frac{2000}{10} \times 0.2 = 40\ cm/s$$

الدرس الثالث: القيم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود

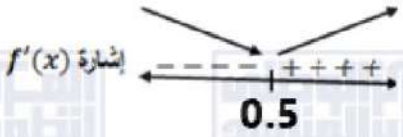
أتحقق من فهمي صفحة 130

a

$f(x) = 6x^2 - 6x + 12$

$f'(x) = 12x - 6$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.5$



إذن، f متناقص في الفترة $(-\infty, 0.5)$، ومتزايد في الفترة $(0.5, \infty)$

b

$h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

$h'(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 4 = 0$

لكن مميز هذه العبارة التربيعية سالب، ومنه فإنه لا أصفار لهذه المشتقة، فيكون $h'(x) > 0$ لجميع قيم x الحقيقية. إذن، h متزايد على $\mathbb{R}$

أتحقق من فهمي صفحة 131

a

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$

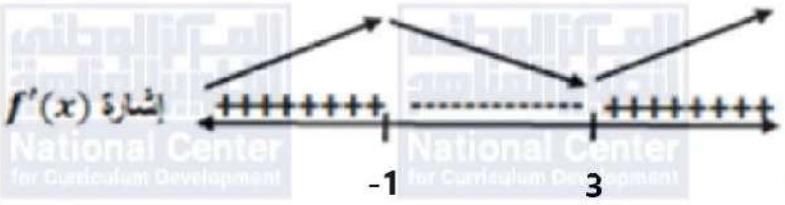
$\Rightarrow x = 3, x = -1$

$x = 3 \Rightarrow y = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) - 1 = -28$

$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 1 = 4$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(3, -28), (-1, 4)$

b



النقطة $(3,15)$ صغرى محلية، والنقطة $(-1,-5)$ عظمى محلية.

أتحقق من فهمي صفحة 133

a

$$y = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow 3x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = (0)^3 - 3(0)^2 + 1 = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = (2)^3 - 3(2)^2 + 1 = -3$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,1), (2,-3)$

b

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 6(0) - 6 = -6 < 0$$

إذن، $(0,1)$ نقطة عظمى محلية

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=2} = 6(2) - 6 = 12 > 0$$

إذن، $(2,-3)$ نقطة صغرى محلية

أتحقق من فهمي صفحة 134

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 3, x = -1$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 4 = -23$

$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 4 = 9$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(3, -23), (-1, 9)$

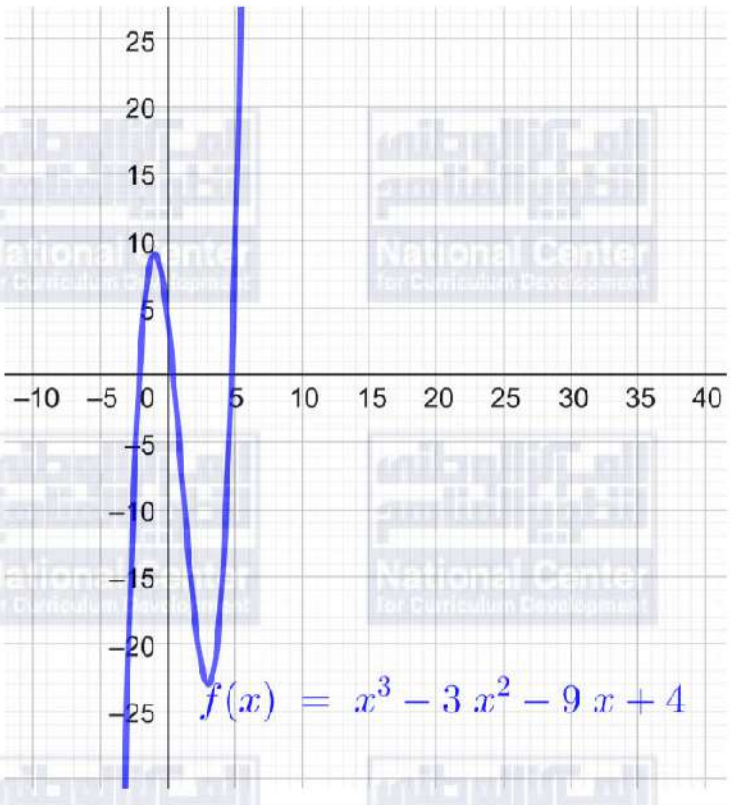
$f''(x) = 6x - 6$

$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0$

إذن، $(3, -23)$ نقطة صغرى محلية

$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0$

إذن، $(-1, 9)$ نقطة عظمى محلية



أتحقق من فهمي صفحة 136

$f(t) = 0.001t^3 - 0.12t^2 + 3.6t + 10$

$f'(t) = 0.003t^2 - 0.24t + 3.6$

$f'(t) = 0 \Rightarrow 0.003t^2 - 0.24t + 3.6 = 0$

$\Rightarrow t^2 - 80t + 1200 = 0$

$\Rightarrow (t - 60)(t - 20) = 0$

$\Rightarrow x = 60, x = 20$

$x = 60 \Rightarrow f(60) = 0.001(60)^3 - 0.12(60)^2 + 3.6(60) + 10 = 10$

$x = 20 \Rightarrow f(20) = 0.001(20)^3 - 0.12(20)^2 + 3.6(20) + 10 = 42$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(60,10), (20,42)$

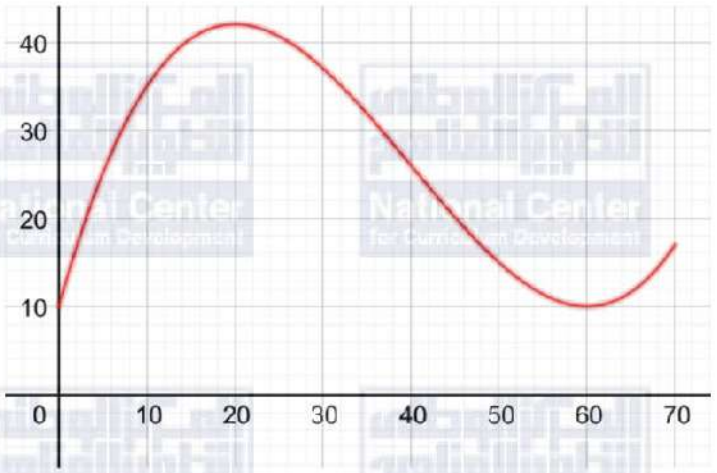
$f''(x) = 0.006t - 0.24$

$f''(60) = 0.006(60) - 0.24 = 0.12 > 0$

إذن، $(60,10)$ نقطة صغرى محلية

$f''(20) = 0.006(20) - 0.24 = -0.12 < 0$

إذن، $(20,42)$ نقطة عظمى محلية



أتدرب وأحل المسائل صفحة 136

1

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 20$

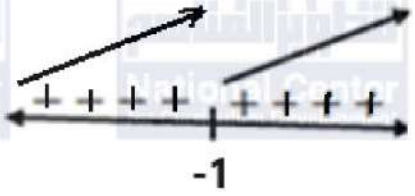
$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow (x+1)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -1$



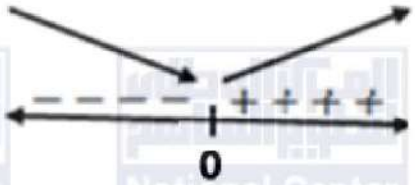
إذن، f متزايد على $\mathbb{R}$

2

$f(x) = (x^2 + 4)^3$

$f'(x) = 3(x^2 + 4)^2 \times 2x = 6x(x^2 + 4)^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$



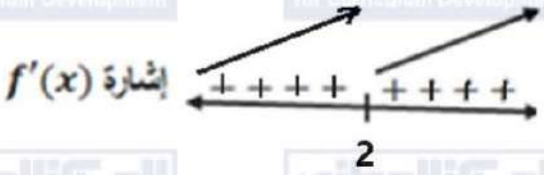
إذن، f متناقص في الفترة $(-\infty, 0)$، ومتزايد في الفترة $(0, \infty)$

3

$f(x) = (x-2)^9$

$f'(x) = 9(x-2)^8$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$



إذن، f متزايد على $\mathbb{R}$

4

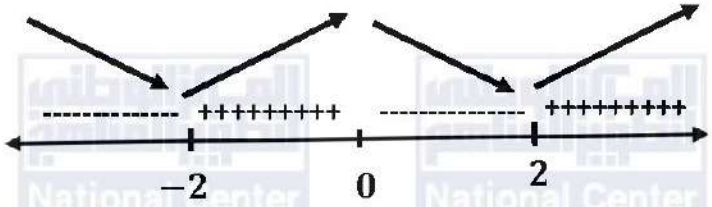
$y = x^4 - 8x^2$

$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 16x$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4x(x^2-4) = 0$

$\Rightarrow 4x(x-2)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = 2, x = -2$



إذن، f متناقص في $(0,2), (-2,-\infty)$، ومتزايد في $(-2,0), (2,\infty)$

5

$y = x^3 + 6x^2 - 15x - 90$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 12x - 15$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x - 15 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+5) = 0$

$\Rightarrow x = 1, x = -5$

$x = 1 \Rightarrow y = (1)^3 + 6(1)^2 - 15(1) - 90 = -98$

$x = -5 \Rightarrow y = (-5)^3 + 6(-5)^2 - 15(-5) - 90 = 10$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(-5,10), (1,-98)$

النقطة $(1,-98)$ صغرى محلية، والنقطة $(-5,10)$ عظمى محلية.

6

$y = -(x-2)^3 + 1$

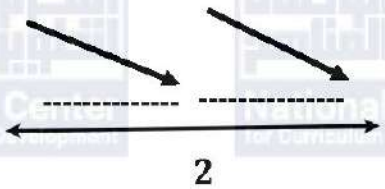
$\frac{dy}{dx} = -3(x-2)^2$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = 2$

$x = 2 \Rightarrow y = -(2-2)^3 + 1 = 1$

النقطة الحرجة لهذا الاقتران هي: $(2,1)$



النقطة $(2,1)$ صغرى محلية.

7

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 144$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 144 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0$

$\Rightarrow (x-8)(x+6) = 0$

$\Rightarrow x = 8, x = -6$

$x = 8 \Rightarrow f(8) = (8)^3 - 3(8)^2 - 144(8) = -832$

$x = -6 \Rightarrow f(-6) = (-6)^3 - 3(-6)^2 - 144(-6) = 540$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(-6,540), (8,-832)$

النقطة $(8,-832)$ صغرى محلية، والنقطة $(-6,540)$ عظمى محلية.

8

$f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 3$

$f'(x) = 12x^3 + 48x^2 + 48x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 48x^2 + 48x = 0$

$\Rightarrow x^3 + 4x^2 + 4x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 + 4x + 4) = 0$

$\Rightarrow x(x+2)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = -2$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3(0)^4 + 16(0)^3 + 24(0)^2 + 3 = 3$

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = 3(-2)^4 + 16(-2)^3 + 24(-2)^2 + 3 = -13$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,3), (-2,-13)$

النقطة $(0,3)$ صغرى محلية، والنقطة $(-2,-13)$ نقطة انعطاف أفقي.

$y = x^4 - 2x^2$

$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0$

$\Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow 4x(x+1)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = -1, x = 1$

$x = 0 \Rightarrow y = (0)^4 - 2(0)^2 = 0$

$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^4 - 2(-1)^2 = -1$

$x = 1 \Rightarrow y = (1)^4 - 2(1)^2 = -1$

9 النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), (1,-1), (-1,-1)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 4$

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 12(0)^2 - 4 = -4 < 0$

إذن، $(0,0)$ نقطة عظمى محلية

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1} = 12(1)^2 - 4 = 8 > 0$

إذن، $(1,-1)$ نقطة صغرى محلية

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-1} = 12(-1)^2 - 4 = 8 > 0$

إذن، $(-1,-1)$ نقطة صغرى محلية

10

$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 24x^2 + 12x = 0$

$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow x(x-1)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = 1$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3(0)^4 - 8(0)^3 + 6(0)^2 = 0$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 3(1)^4 - 8(1)^3 + 6(1)^2 = 1$

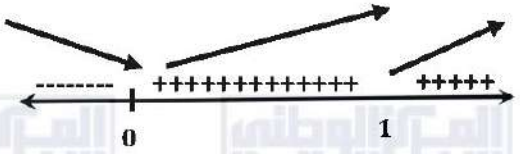
النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), (1,1)$

$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$

$f''(0) = 36(0)^2 - 48(0) + 12 = 12 > 0$

إذن، $(0,0)$ نقطة صغرى محلية

$f''(1) = 36(1)^2 - 48(1) + 12 = 0$



إذن، $(1,1)$ نقطة انعطاف أفقي

11

$$y = x^2(x-4) = x^3 - 4x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x = 0$$

$$\Rightarrow x(3x-8) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \frac{8}{3}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = (0)^2(0-4) = 0$$

$$x = \frac{8}{3} \Rightarrow y = \left(\frac{8}{3}\right)^2\left(\frac{8}{3} - 4\right) = -\frac{64}{27}$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), \left(\frac{8}{3}, -\frac{64}{27}\right)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 8$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 6(0) - 8 = -8 < 0$$

إذن، $(0,0)$ نقطة عظمى محلية

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{8}{3}} = 6\left(\frac{8}{3}\right) - 8 = 8 > 0$$

إذن، $\left(\frac{8}{3}, -\frac{64}{27}\right)$ نقطة صغرى محلية

$y = x^5 - 5x^3$

$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 15x^2$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 5x^4 - 15x^2 = 0$

$\Rightarrow 5x^2(x^2 - 3) = 0$

$\Rightarrow 5x^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$

$x = 0 \Rightarrow y = (0)^5 - 5(0)^3 = 0$

$x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = (-\sqrt{3})^5 - 5(-\sqrt{3})^3 = 6\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3} \Rightarrow y = (\sqrt{3})^5 - 5(\sqrt{3})^3 = -6\sqrt{3}$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), (\sqrt{3}, -6\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$

12 $\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 30x$

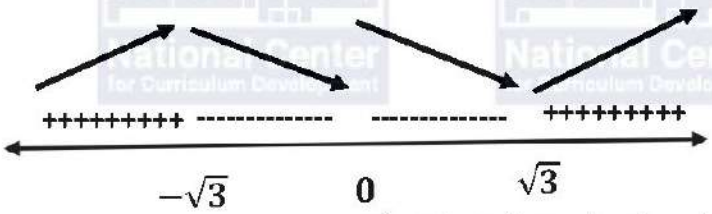
$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-\sqrt{3}} = 20(-\sqrt{3})^3 - 30(-\sqrt{3}) = -30\sqrt{3} > 0$

إذن، $(-\sqrt{3}, -30\sqrt{3})$ نقطة عظمى محلية

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\sqrt{3}} = 20(\sqrt{3})^3 - 30(\sqrt{3}) = 30\sqrt{3} > 0$

إذن، $(\sqrt{3}, 30\sqrt{3})$ نقطة صغرى محلية

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 20(0)^3 - 30(0) = 0$



إذن، $(0,0)$ نقطة انعطاف أفقي

13

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = -1, x = 3$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 15 = 20$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 15 = -12$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(-1,20), (3,-12)$

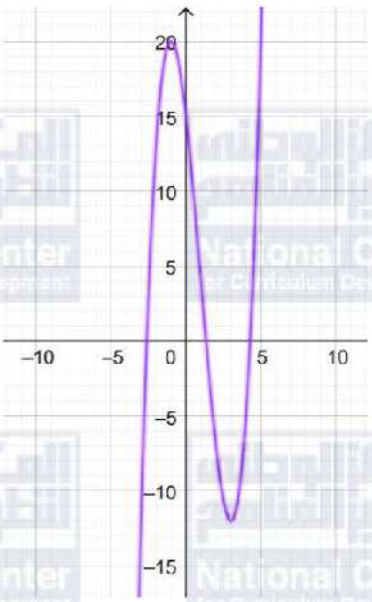
$f''(x) = 6x - 6$

$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0$

إذن، $(-1,20)$ نقطة عظمى محلية

$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0$

إذن، $(3,-12)$ نقطة صغرى محلية



$y = x^2 - 12x - 20$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 12$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 12 = 0$

$\Rightarrow x = 6$

$x = 6 \Rightarrow y = (6)^2 - 12(6) - 20 = -56$

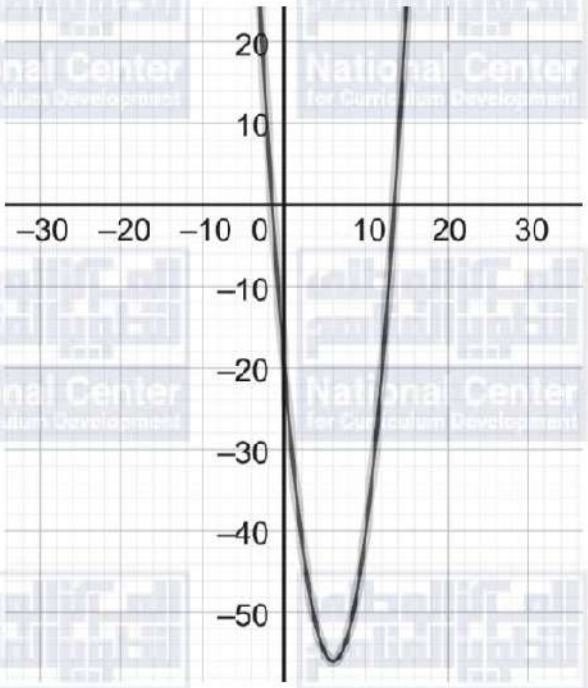
النقطة الحرجة لهذا الاقتران هي: $(6, -56)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=6} = 2 > 0$

14

إذن، $(6, -36)$ نقطة صغرى محلية



15

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 180x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 180$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x - 180 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 60 = 0$

$\Rightarrow (x+6)(x-10) = 0$

$\Rightarrow x = -6, x = 10$

$x = -6 \Rightarrow f(-6) = (-6)^3 - 6(-6)^2 - 180(-6) = 648$

$x = 10 \Rightarrow f(10) = (10)^3 - 6(10)^2 - 180(10) = -1400$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(-6,648), (10,-1400)$

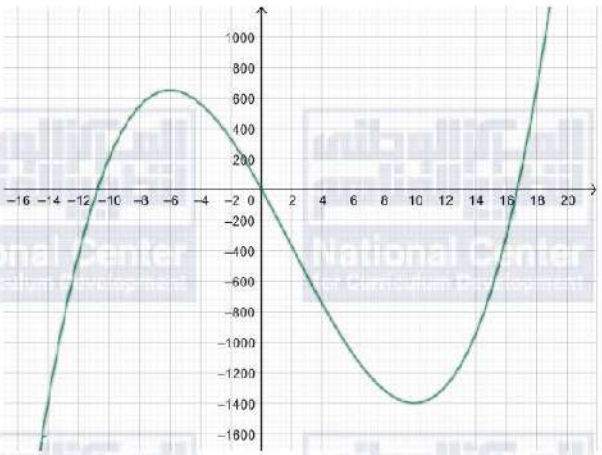
$f''(x) = 6x - 12$

$f''(-6) = 6(-6) - 12 = -48 < 0$

إذن، $(-6,648)$ نقطة عظمى محلية

$f''(10) = 6(10) - 12 = 48 > 0$

إذن، $(10,-1400)$ نقطة صغرى محلية



16

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 8$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 18x + 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, x = 2$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) + 8 = 12$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2(2)^3 - 9(2)^2 + 12(2) + 8 = 12$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(1,12), (2,12)$

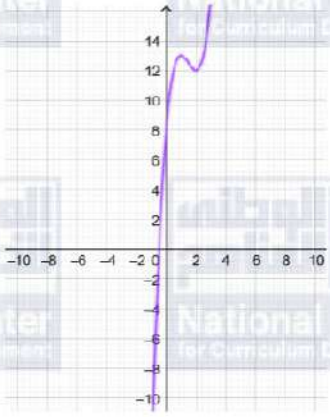
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 18$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1} = 12(1) - 18 = -6 < 0$$

إذن، $(1,12)$ نقطة عظمى محلية

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=2} = 12(2) - 18 = 6 > 0$$

إذن، $(1,12)$ نقطة صغرى محلية



17

$f'(x) = (x-1)^2(x-3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

قيم x التي يكون عندها نقاط حرجة لهذا الاقتران هي: $x = 1, x = 3$

$f'(x) = (x-1)^2(x-3)$

إذن، عند $x = 3$ توجد قيمة صغرى محلية، وعند $x = 1$ توجد نقطة انعطاف أفقي

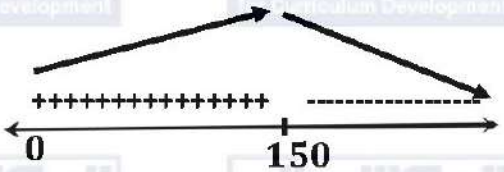
18

$P(t) = 120t - 0.4t^2 + 1000$

$P'(t) = 120 - 0.8t$

$P'(t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{120}{0.8} = 150$

$P(150) = 120(150) - 0.4(150)^2 + 1000 = 10000$



إذن، أكبر عدد يمكن أن تصل إليه الضفادع في البحيرة هو 10000 ضفدع.

19

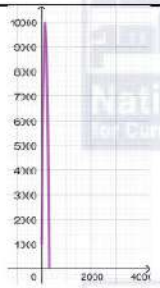
$P(t) = 0 \Rightarrow 120t - 0.4t^2 + 1000 = 0$

$\Rightarrow t^2 - 300t - 2500 = 0$

$\Rightarrow t = 150 + 50\sqrt{10} \approx 308$

ستختفي الضفادع من البحيرة بعد حوالي 308 أشهر تقريبًا

20



21

$h(t) = 0.2t^2 - 0.01t^3$

$h'(t) = 0.4t - 0.03t^2$

$h'(t) = 0 \Rightarrow 0.4t - 0.03t^2 = 0$

$\Rightarrow 3t^2 - 40t = 0$

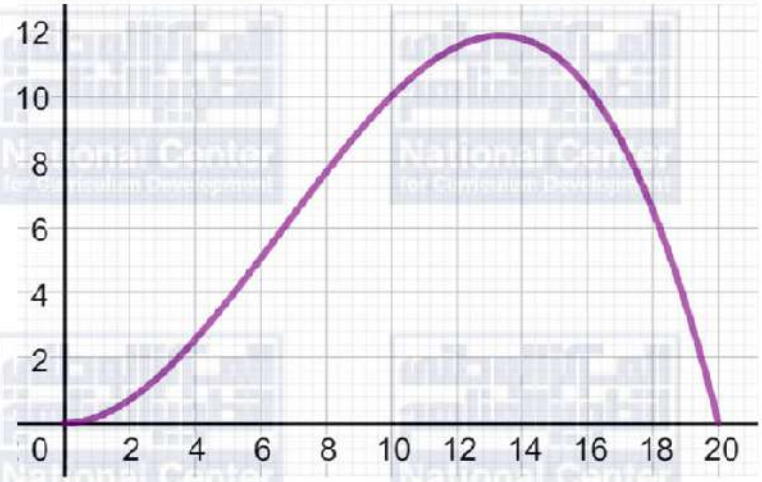
$\Rightarrow t(3t - 40) = 0$

$\Rightarrow t = 0, t = \frac{40}{3}$

$h''(t) = 0.4 - 0.06t$

$h''\left(\frac{40}{3}\right) = 0.4 - 0.06\left(\frac{40}{3}\right) = -0.4 < 0$

إذن، عند $t = \frac{40}{3}$ توجد قيمة عظمى محلية



22

بما ان الزمن اللازم للصعود هو $\frac{40}{3}s$ ، فيكون الزمن اللازم للهبوط هو: $20 - \frac{40}{3} = \frac{20}{3}$

ونلاحظ ان الزمن اللازم للصعود يساوي مثلي الزمن اللازم للهبوط.

23	$y = ax^2 + bx + c$ منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, -48)$ إذن: $-48 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = -48$ منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(6,0)$ إذن: $0 = a(6)^2 + b(6) - 48 \Rightarrow 36a + 6b = 48 \Rightarrow 6a + b = 8 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$ للاقتران قيمة عظمى عندما $x = 7$ إذن: $\frac{dy}{dx}\Big\|_{x=7} = 0$ $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$ $\frac{dy}{dx}\Big\|_{x=7} = 14a + b$ $\frac{dy}{dx}\Big\|_{x=7} = 0 \Rightarrow 14a + b = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$ بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد: $8a = -8$ ومنه $a = -1$ وبالتعويض في إحدى المعادلتين نجد: $b = 14$
24	$s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$ $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 30t + 63$ $v(8) = 3(8)^2 - 30(8) + 63 = 15\ m/s$

25

$s'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 30t + 63 = 0$

$\Rightarrow t^2 - 10t + 21 = 0$

$\Rightarrow (t-3)(t-7) = 0$

$\Rightarrow t = 3, t = 7$

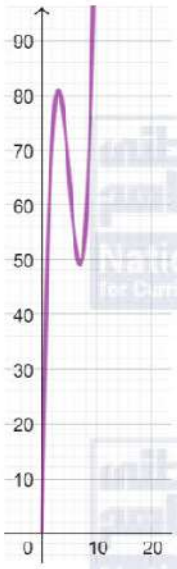
$s''(t) = 6t - 30$

$s''(3) = 6(3) - 30 = -12 < 0$

إذن، عند $t = 3$ توجد قيمة عظمى محلية

$s''(7) = 6(7) - 30 = 12 > 0$

إذن، عند $t = 7$ توجد قيمة صغرى محلية

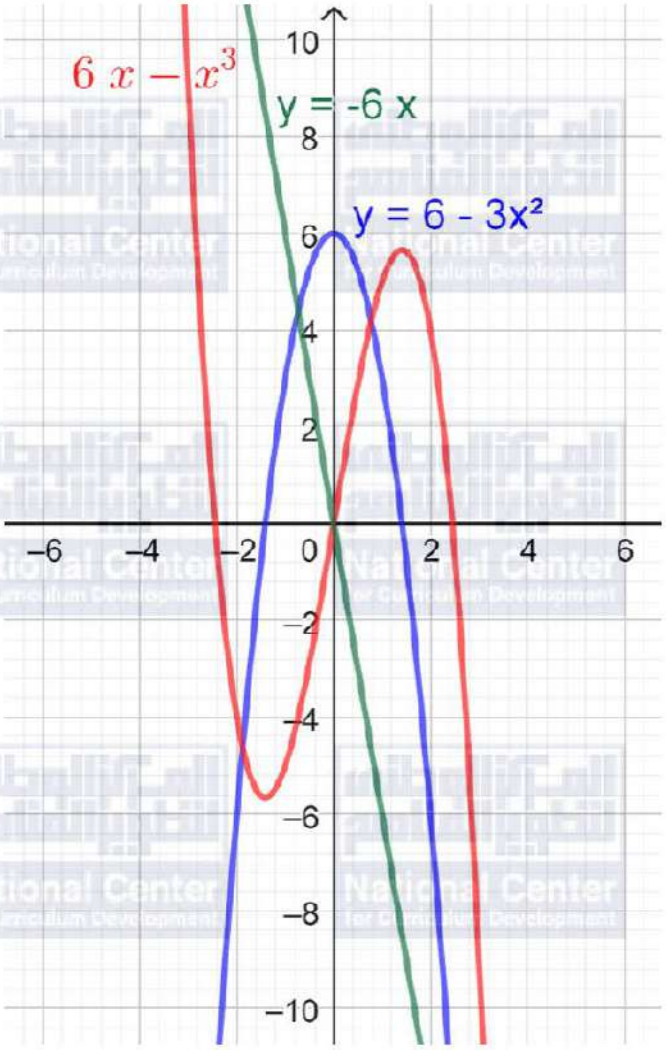


26

$y = x(6 - x^2) = 6x - x^3$

$\frac{dy}{dx} = 6 - 3x^2$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x$



27	نلاحظ أنه في الفترة التي يكون فيها منحنى الاقتران متزايدًا، تكون إشارة مشتقته موجبة، أي أن منحنى المشتقة فوق المحور x و في الفترة التي يكون فيها منحنى الاقتران متناقصًا، تكون إشارة مشتقته سالبة، أي أن منحنى المشتقة تحت المحور x وعند قيم x التي تكون عظمى محلية أو صغرى محلية في منحنى الاقتران، تكون مشتقته صفرًا، أي أن منحنى المشتقة يقطع المحور x
28	$y = 23t - 5t^2$ $\frac{dy}{dt} = 23 - 10t$ $\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow t = 2.3$ $\frac{d^2y}{dt^2} = -10$ $\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right\|_{t=2.3} = -10 < 0$ إذن، للاقتران قيمة عظمى محلية عندما $t = 2.3$ $t = 2.3 \Rightarrow y = 23(2.3) - 5(2.3)^2 = 26.45$ أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة هو $26.45\ m$
29	مقاومة الهواء تقلل أقصى ارتفاع تصله الكرة
30	$y = x^3 + ax^2 + b$ $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax$ $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2ax = 0$ $\Rightarrow x(3x + 2a) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = -\frac{2}{3}a$ إذن، للاقتران نقطة حرجة عندما $x = 0$ أي عند تقاطعه مع المحور y

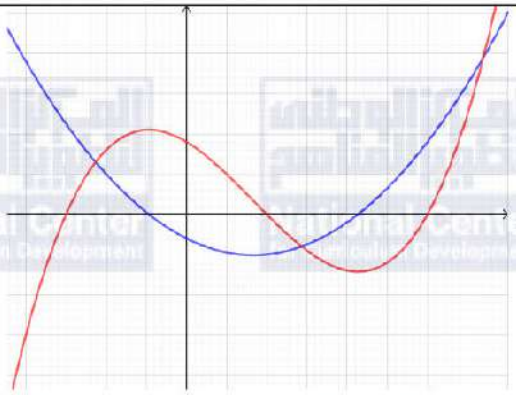
31

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6x + 2a$$

$$\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0} = 6(0) + 2a = 2a > 0$$

إذن، للاقتران قيمة صغرى محلية عندما $x = 0$

32



33

$$y = px^3 - 4px^2 + 5x - 11 \quad , p > 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3px^2 - 8px + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow 3px^2 - 8px + 5 = 0$$

$$\Delta = (-8p)^2 - 4(3p)(5) = 64p^2 - 60p$$

حتى يكون للاقتران نقطتان حرجتان يجب أن يكون مميز هذه العبارة التربيعية موجبًا

$$64p^2 - 60p > 0 \Longrightarrow 4p(16p - 15) > 0$$

$$\Longrightarrow p \in \left(\frac{15}{16}, \infty\right)$$

الدرس الرابع: تطبيقات عملية على الاشتقاق

أتحقق من فهمي صفحة 141

المساحة الكلية لعلبة الكرتون $A = 4xh + 2x^2$

حجم العلبة $V = x^2h$

$$1000 = x^2h \quad \rightarrow \quad h = \frac{1000}{x^2}$$

$$A = 4xh + 2x^2$$

$$A(x) = 4x\left(\frac{1000}{x^2}\right) + 2x^2 = \frac{4000}{x} + 2x^2$$

$$A'(x) = \frac{-4000}{x^2} + 4x$$

$$\frac{-4000}{x^2} + 4x = 0 \implies 4x = \frac{4000}{x^2} \implies 4x^3 = 4000 \implies x^3 = 1000$$

$$\implies x = 10$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 10$

$$A''(x) = \frac{8000}{x^3} + 4$$

$$S''(10) = \frac{8000}{(10)^3} + 4 = 12 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 10$ ،

وتكون أبعاد العلبة التي تجعل كمية الكرتون المستعملة أقل ما يمكن هي:

$$l = x = 10\,m, \qquad w = x = 10\,m, \qquad h = \frac{2}{(10)^2}\,m$$

أتحقق من فهمي صفحة 142

a

$$t = \frac{d}{v} = \frac{100}{x}$$

$$C = R \times t = \left(8 + \frac{x^3}{2000}\right) \times \frac{100}{x} = \frac{800}{x} + \frac{x^2}{20}$$

b

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{800}{x^2} + \frac{x}{10}$$

$$\frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{800}{x^2} + \frac{x}{10} = 0 \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{800}{x^2} \Rightarrow x^3 = 8000 \Rightarrow x = 20$$

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{1600}{x^3} + \frac{1}{10}$$

$$\left.\frac{d^2C}{dx^2}\right|_{x=20} = \frac{1600}{20^3} + \frac{1}{10} = \frac{21}{10} > 0$$

إذن للاقتران قيمة صغرى محلية عندما $x = 20$

وتكون سرعة السيارة الأكثر اقتصاداً في الوقود في أثناء هذه الرحلة هي $20\ km/h$

أتحقق من فهمي صفحة 144

اقتران الإيراد $R(x) = (1750 - 2x)x = 1750x - 2x^2$

اقتران التكلفة $C(x) = 2250 + 18x$

اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

$$P(x) = 1750x - 2x^2 - 2250 - 18x$$
$$= 1732x - 2x^2 - 2250$$

$$P'(x) = 1732 - 4x$$

$$1732 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1732}{4} = 433$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 433$

$$P''(x) = -4 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 433$

ومنه فإنه لتحقيق أكبر ربح ممكن يجب إنتاج وبيع 433 ثلاجة.

أتحقق من فهمي صفحة 145

مساحة المستطيل $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$

$$A'(x) = 10 - 2x$$

$$10 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 5$

$$A''(x) = -2$$
$$A''(5) = -2 < 0$$

توجد قيمة عظمى عندما $x = 5$

إذن أكبر مساحة ممكنة هي $A(5) = 10(5) - (5)^2 = 25\ cm^2$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 146		
1	$P = AB + BC + CD$ $300 = AB + x + AB$ $300 = 2AB + x$ $300 - x = 2AB$ $AB = \frac{300 - x}{2} = 150 - \frac{1}{2}x$	محيط الحديقة من دون الجدار
2	$A = BC \times AB$ $A(x) = x \times \left(150 - \frac{1}{2}x\right)$ $= 150x - \frac{1}{2}x^2$	مساحة الحديقة المستطيلة
3	$A'(x) = 150 - x$ $150 - x = 0$ $x = 150$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 150$ $A''(x) = -1$ $A''(150) = -1 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 150$ ، ويكون بعدا الحديقة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن هما: $BC = x = 150\,m$ ، $AB = 150 - \frac{1}{2}x = 150 - \frac{1}{2}(150) = 75\,m$	

4	مساحة المستطيل $A = xy$ محيط المستطيل $P = 2x + 2y$ $54 = 2x + 2y$ $27 = x + y \quad \Rightarrow \quad y = 27 - x$ $A = xy$ $A(x) = x(27 - x)$ $= 27x - x^2$ $A'(x) = 27 - 2x$ $27 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{27}{2}$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \frac{27}{2}$ $A''(x) = -2 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{27}{2}$ ، وتكون أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة هي: $A\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{729}{4} = 182.25\ m^2$
5	$r + h = 60 \Rightarrow h = 60 - r$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2(60 - r) = 20\pi r^2 - \frac{1}{3}\pi r^3$ $V'(r) = 40\pi r - \pi r^2$ $V'(r) = 0 \Rightarrow 40\pi r - \pi r^2 = 0 \Rightarrow \pi r(40 - r) = 0 \Rightarrow r = 0, r = 40$ $V''(r) = 40\pi - 2\pi r$ $V''(40) = 40\pi - 2\pi(40) = -40\pi < 0$ للاقتران قيمة عظمى محلية عندما $r = 40$ إذن، يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن عندما: $h = 20\ cm$ و $r = 40cm$
6	حجم العلبة $V = lwh$ $V(x) = (48 - 2x)(30 - 2x)x$ $= (1440 - 96x - 60x + 4x^2)x$ $= (1440 - 156x + 4x^2)x$ $= 1440x - 156x^2 + 4x^3$

7	$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2$ $12x^2 - 312x + 1440 = 0$ $x^2 - 26x + 120 = 0$ $(x - 20)(x - 6) = 0$ $x = 20 \quad or \quad x = 6$ توجد قيمتان حرجتان هما $x = 6$ و $x = 20$ $V''(x) = -312 + 24x$ $V''(20) = -312 + 24(20) = -312 + 480 = 168 > 0$ $V''(6) = -312 + 24(6) = -312 + 144 = -168 < 0$ توجد قيمة عظمى عندما $x = 6$ ، إذن يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن عندما $x = 6$

8	حجم المنشور الثلاثي القائم = مساحة القاعدة المثلثة × ارتفاع المنشور مساحة المثلث: $A_1 = \frac{1}{2}xx\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ حجم المنشور: $V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2h$ $500 = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2h$ $\frac{2000}{\sqrt{3}} = x^2h$ $h = \frac{2000}{\sqrt{3}\,x^2}$ مساحة سطح المنشور: $A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right) + 3(xh)$ $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 3x\left(\frac{2000}{\sqrt{3}x^2}\right)$ $= \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{2000\sqrt{3}}{x}$ $A'(x) = \sqrt{3}x - \frac{2000\sqrt{3}}{x^2}$ $A'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{3}x = \frac{2000\sqrt{3}}{x^2}$ $\Rightarrow x^3 = 2000$ $\Rightarrow x = \sqrt[3]{2000}$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2000}$ $A''(x) = \sqrt{3} + \frac{4000\sqrt{3}}{x^3}$ $A''\left(\sqrt[3]{2000}\right) = \sqrt{3} + \frac{4000\sqrt{3}}{\left(\sqrt[3]{2000}\right)^3} = 3\sqrt{3} > 0$ توجد قيمة صغرى عندما $x = \sqrt[3]{2000}$ إذن أبعاد القالب التي تجعل المواد المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي: $x = \sqrt[3]{2000}\ cm\ ,\ h = \frac{2000}{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{2000}\right)^2}\ cm$

9	$200 = 2r + r\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{200 - 2r}{r}$ $A = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}r^2\left(\dfrac{200 - 2r}{r}\right) = 100r - r^2$
10	$A'(r) = 100 - 2r$ $A'(r) = 0 \Rightarrow r = 50$ $A''(r) = -2$ $A''(50) = -2 < 0$ إذن، أكبر مساحة ممكنة للقطاع الدائري هي: $A(50) = 100(50) - (50)^2 = 2500\ cm^2$
11	$V = 9x^2h - x^2h = 8x^2h$ $2000 = 8x^2h \Rightarrow h = \dfrac{250}{x^2}$ $A = 16x^2 + 12xh = 16x^2 + 12x\left(\dfrac{250}{x^2}\right) = 16x^2 + \dfrac{3000}{x}$
12	$A'(x) = 32x - \dfrac{3000}{x^2}$ $A'(x) = 0 \Rightarrow 32x - \dfrac{3000}{x^2} = 0 \Rightarrow 32x = \dfrac{3000}{x^2} \Rightarrow x^3 = 93.75 \Rightarrow x = \sqrt[3]{93.75}$ $A''(x) = 32 + \dfrac{6000}{x^3}$ $A''\left(\sqrt[3]{93.75}\right) = 32 + \dfrac{6000}{\sqrt[3]{93.75}^3} = 32 + \dfrac{6000}{93.75} = 96 > 0$ إذن، توجد لهذا الاقتران قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{93.75}$ تكون المساحة الكلية الخارجية لسطح العلبة أقل ما يمكن عندما $x \approx 4.5cm$
13	$400 = 2x + 2\pi r \Rightarrow x = \dfrac{400 - 2\pi r}{2}$ $A = 2xr + \pi r^2 = 2\left(\dfrac{400 - 2\pi r}{2}\right)r + \pi r^2 = 400r - \pi r^2$

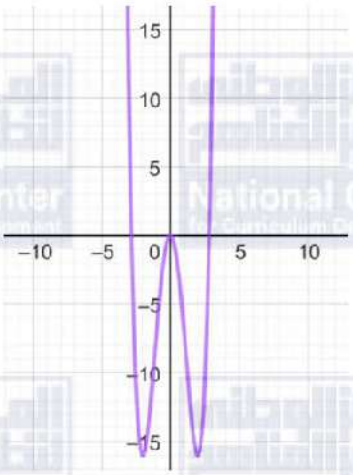
14	$A'(r) = 400 - 2\pi r$ $A'(r) = 0 \Rightarrow 400 - 2\pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{200}{\pi}$ $A''(r) = -2\pi$ $A''\left(\frac{200}{\pi}\right) = -2\pi < 0$ إذن، للمضمار الدائري قيمة عظمى عندما $x = \frac{400-2\pi r}{2} = 0$ و $r = \frac{200}{\pi}$
15	من التشابه: $\frac{AD}{4} = \frac{8-h}{8} \Rightarrow AD = \frac{8-h}{2} = 4 - \frac{1}{2}h$
16	$V = (AD)^2 \times h = h\left(4 - \frac{1}{2}h\right)^2 = h\left(16 - 4h + \frac{1}{4}h^2\right) = \frac{1}{4}h^3 - 4h^2 + 16h$
17	$V'(h) = \frac{3}{4}h^2 - 8h + 16$ $V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}h^2 - 8h + 16 = 0 \Rightarrow 3h^2 - 32h + 64 = 0$ $\Rightarrow (3h-8)(h-8) = 0 \Rightarrow h = \frac{8}{3}, h = 8$ $V''(h) = \frac{3}{2}h - 8$ $V''\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}\right) - 8 = -4 < 0$ إذن، يكون حجم متوازي المستطيلات أكبر ما يمكن عندما $h = \frac{8}{3}\ cm$

اختبار نهاية الوحدة الثالثة

1	D
2	C
3	B
4	B
5	C
6	$f'(x)=2\left(x+\frac{4}{x}\right)\times\left(1-\frac{4}{x^2}\right)=\left(2x+\frac{8}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x^2}\right)=2x-\frac{32}{x^3}$
7	$m_{\text{المماس}}=f'(4)=8-\frac{32}{64}=8-0.5=7.5$ $y-y_1=m_{\text{المماس}}(x-x_1)$ $y-25=7.5(x-4)$ $\Longrightarrow y=7.5x-5$ معادلة المماس
8	$y=2x+\frac{8}{x}$ $\frac{dy}{dx}=2-\frac{8}{x^2}$
9	$10=2x+\frac{8}{x}\Longrightarrow x^2-5x+4=0\Longrightarrow(x-1)(x-4)=0\Longrightarrow x=1,x=4$ $m_{\text{المماس}}=\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=1}=2-8=-6$ $m_{\text{المماس}}=\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=4}=2-0.5=1.5$

10	$y = (3x + a)(x - 1) = 3x^2 - 3x + ax - a$ $\frac{dy}{dx} = 6x - 3 + a$ $\frac{dy}{dx} = a \Rightarrow 6x - 3 + a = a \Rightarrow x = 2$ $x = 2 \Rightarrow y = 12 - 6 + a = 6 + a$ إحداثيات النقطة المطلوبة هي: $(2, 6 + a)$
11	$y = x^2(x^2 - p) = x^4 - px^2$ $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2px$
12	$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 16x$ $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0$ $\Rightarrow 4x(x + 2)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, -2, 2$ $x = 0 \Rightarrow y = 0$ $x = -2 \Rightarrow y = 16 - 32 = -16$ $x = 2 \Rightarrow y = 16 - 32 = -16$ النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), (-2, -16), (2, -16)$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 16$ $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{x=0} = 12(0)^2 - 16 = -16 < 0$ إذن، $(0,0)$ نقطة عظمى محلية $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{x=-2} = 12(-2)^2 - 16 = 32 > 0$ إذن، $(-2, -16)$ نقطة صغرى محلية $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{x=2} = 12(2)^2 - 16 = 32 > 0$ إذن، $(2, -16)$ نقطة صغرى محلية

13



14

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b$

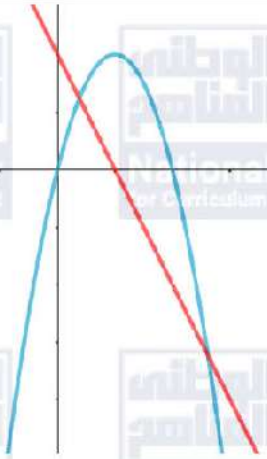
$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0$

$\Delta = (2a)^2 - 4(3)(b) = 4a^2 - 12b$

حتى يكون للاقتران نقطتان حرجتان يجب أن يكون مميز هذه العبارة التربيعية موجبًا

$4a^2 - 12b > 0 \Rightarrow 4a^2 > 12b \Rightarrow a^2 > 3b$

15



16

$f(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 58$

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 48$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 48 = 0$

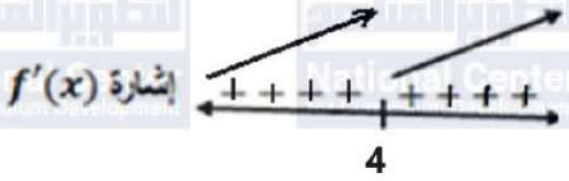
$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$

$\Rightarrow (x-4)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 4$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = (4)^3 - 12(4)^2 + 48(4) - 58 = 6$

النقطة الحرجة لهذا الاقتران هي: $(4,6)$



إذن، $(4,6)$ نقطة انعطاف أفقي

17

$f(x) = x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 24x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x = 0$

$\Rightarrow x(x-8) = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = 8$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = (0)^3 - 12(0)^2 = 0$

$x = 8 \Rightarrow f(8) = (8)^3 - 12(8)^2 = 416$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), (8,416)$

$f''(x) = 6x - 24$

$f''(0) = 6(0) - 24 = -24 < 0$

إذن، $(0,0)$ نقطة عظمى محلية

$f''(8) = 6(8) - 24 = 24 > 0$

إذن، $(8,416)$ نقطة صغرى محلية

18

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x-5$$

$$f'(x)=x^2+3x-4$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+3x-4=0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow x=-4, x=1$$

$$x=-4 \Rightarrow f(-4)=\frac{1}{3}(-4)^3+\frac{3}{2}(-4)^2-4(-4)-5=\frac{32}{3}$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=\frac{1}{3}(1)^3+\frac{3}{2}(1)^2-4(1)-5=-\frac{43}{6}$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $\left(-4,\frac{32}{3}\right),\left(1,-\frac{43}{6}\right)$

$$f''(x)=2x+3$$

$$f''(-4)=2(-4)+3=-5<0$$

إذن، $\left(-4,\frac{32}{3}\right)$ نقطة عظمى محلية

$$f''(1)=2(1)+3=5>0$$

إذن، $\left(1,-\frac{43}{6}\right)$ نقطة صغرى محلية

19

$$f(x)=2x^3-3x^2+45x+8$$

$$f'(x)=6x^2-6x+45$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-6x+45=0$$

مميز هذه العبارة التربيعية سالب، فلا توجد نقاط حرجة لهذا الاقتران

20	$y = x^{\frac{3}{2}}$ $4 = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{16}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=\sqrt[3]{16}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{16}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt[6]{16}$ $y - 4 = \frac{3}{2}\sqrt[6]{16}\left(x - \sqrt[3]{16}\right)$ $y - 4 = \frac{3}{2}\sqrt[6]{16}x - 8$ $\Rightarrow y = \frac{3}{2}\sqrt[6]{16}x - 4$ معادلة المماس
21	$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{81} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{729}$ $y - \frac{1}{729} = \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{81}\right)$ $y - \frac{1}{729} = \frac{1}{6}x - \frac{1}{486}$ $\Rightarrow y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{1458}$ معادلة المماس
22	$y = 10 - x^2$ $\frac{dy}{dx} = -2x$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = -4$ $y - 6 = -4(x - 2)$ $y - 6 = -4x + 8$ $\Rightarrow y = -4x + 14$ معادلة المماس

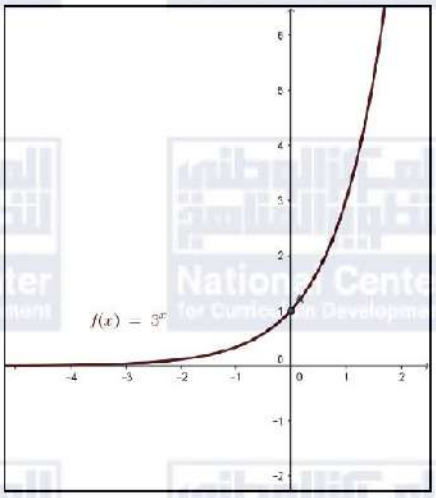
23	يجب حساب المقطع x والمقطع y للمماس الذي معادلته $y = -4x + 14$ $x = 0 \Rightarrow y = 14$ $y = 0 \Rightarrow x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ $A = \frac{1}{2}(14)\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{2}$
24	$x = 2y + 3 \Rightarrow y = \frac{x-3}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ $m_{\text{العمودي}} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{\text{المماس}} = -2$ $y = x(x+4) = x^2 + 4x$ $\frac{dy}{dx} = 2x + 4$ $\frac{dy}{dx} = -2 \Rightarrow 2x + 4 = -2 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = -3(-3+4) = -3$ $\Rightarrow P(-3, -3)$
25	$pV = 1200 \Rightarrow V = \frac{1200}{p}$ $p = 10 + 0.4\sqrt{t} = 10 + 0.4t^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dp} \times \frac{dp}{dt} = -\frac{1200}{p^2} \times 0.2t^{-\frac{1}{2}} = -\frac{240}{\sqrt{t}\left(10 + 0.4\sqrt{t}\right)^2}$ $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{t=100} = -\frac{240}{10(10+4)^2} = -\frac{6}{49}$

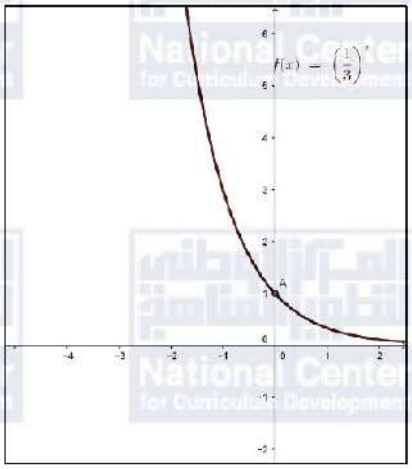
26	$2000 = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1500}{\pi}}$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt} \Rightarrow 36 = 4\pi r^2 \times \frac{dr}{dt}$ $\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{36}{4\pi r^2} = \frac{9}{\pi r^2}$ $A = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dr} = 8\pi r$ $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt} = 8\pi r \times \frac{9}{\pi r^2} = \frac{72}{r}$ $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{r=\sqrt[3]{\frac{1500}{\pi}}} = \frac{72}{\sqrt[3]{\frac{1500}{\pi}}}\ cm^2/s$
27	$s(t) = 10 + 6t - 0.5t^2$ $v(t) = s'(t) = 6 - t$ $v(10) = s'(t) = 6 - 10 = -4\ m/s$

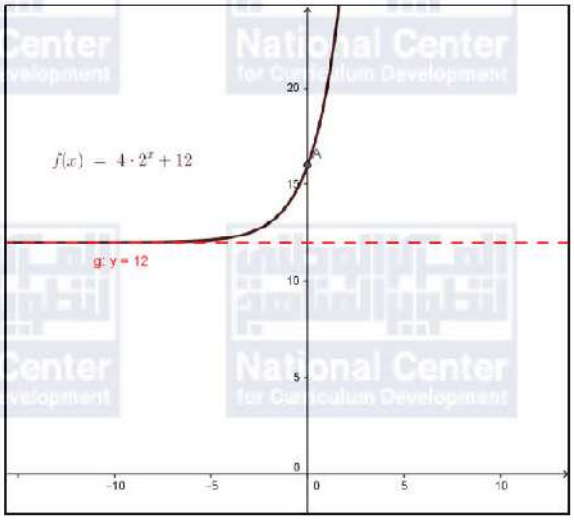
28	حجم الصندوق $V = x^2y$ مجموع أطوال الأحرف $S = 8x + 4y$ $144 = 8x + 4y$ $4y = 144 - 8x$ $y = 36 - 2x$ حجم الصندوق بدلالة x $V(x) = x^2(36 - 2x)$ $= 36x^2 - 2x^3$ $V'(x) = 72x - 6x^2$ $72x - 6x^2 = 0$ $6x(12 - x) = 0$ $x = 0 \quad or \quad x = 12$ توجد قيمتان حرجتان هما $x = 12$ و $x = 0$ $V''(x) = 72 - 12x$ $V''(0) = 72 > 0$ $V''(12) = 72 - 144 < 0$ توجد قيمة عظمى عندما $x = 12$ إذن قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن هي $x = 12$
29	c
30	A
31	A

الوحدة الرابعة: الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

الدرس الأول: الاقترانات الأسية

أتحقق من فهمي صفحة 153	
a	مجال الاقتران هو الاعداد الحقيقية ومداه الفترة $(0,\infty)$ وله خط تقارب افقي هو المحور x 
b	_ليس للإقتران مقطع x وله مقطع y هو 1 عند x=0
c	الاقتران متزايد
d	الاقتران واحد لواحد

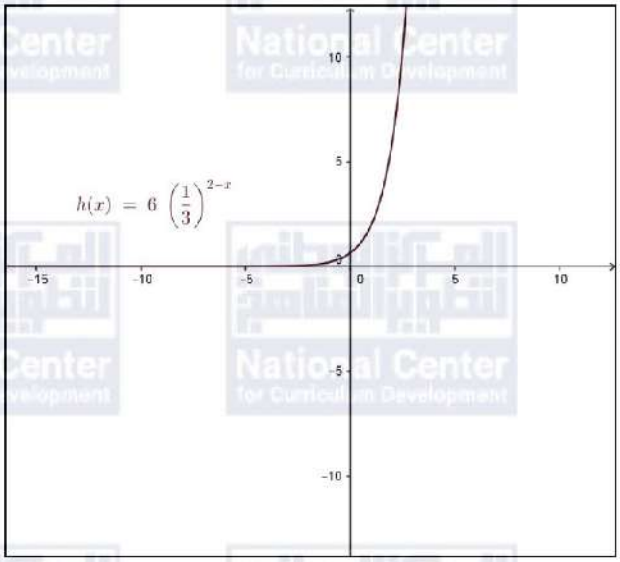
أتحقق من فهمي صفحة 155	
a	مجال الاقتران هو الاعداد الحقيقية ومداه الفترة $(0,\infty)$ وله خط تقارب افقي هو المحور x 
b	ليس للإقتران مقطع x وله مقطع y هو 1 عند x=0

c	الاقتران متناقص
d	الاقتران واحد لواحد
	أتحقق من فهمي صفحة 157
a	خط التقارب الافقي y=12 مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R المدى في الفترة $(12,\infty)$ 

خط التقارب الافقي هو محور x

مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R المدى في الفترة $(0,\infty)$

b



أتحقق من فهمي صفحة 158

a

$$N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \Rightarrow N(30) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{30}} = \frac{1}{2}$$

كمية السيزيوم 137المتبقية بعد 30 سنة هي $\frac{1}{2}g$

b

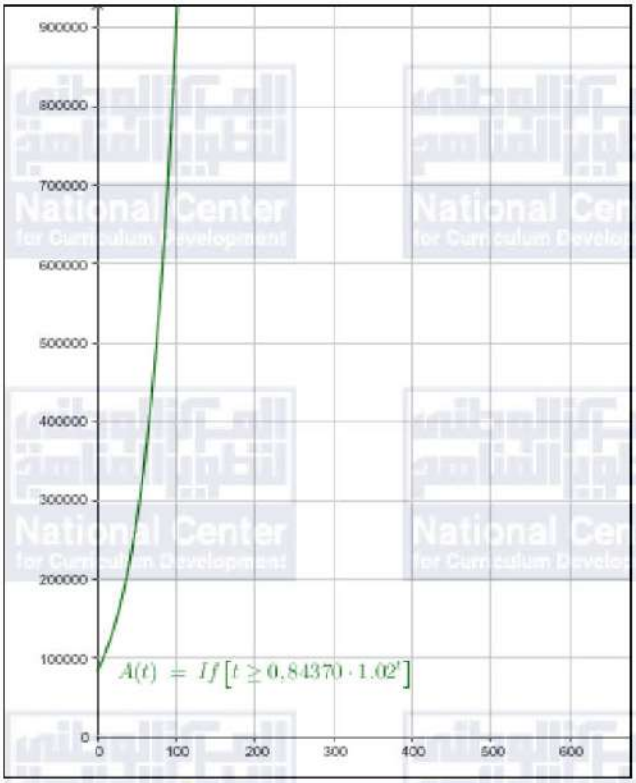
$$N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$$\Rightarrow 0.25 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

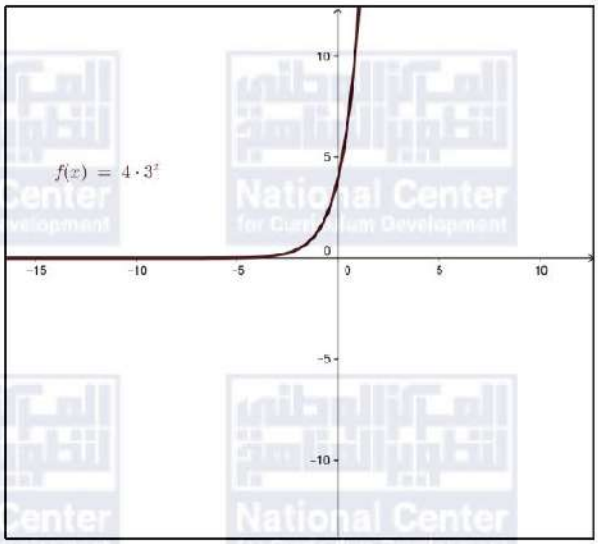
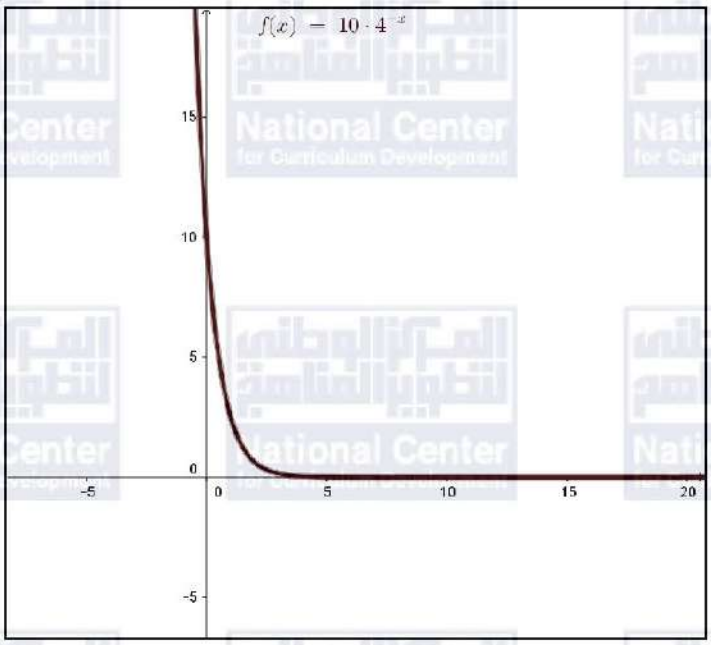
$$\Rightarrow (0.5)^2 = (0.5)^{\frac{t}{30}}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{t}{30} \Rightarrow t = 60$$

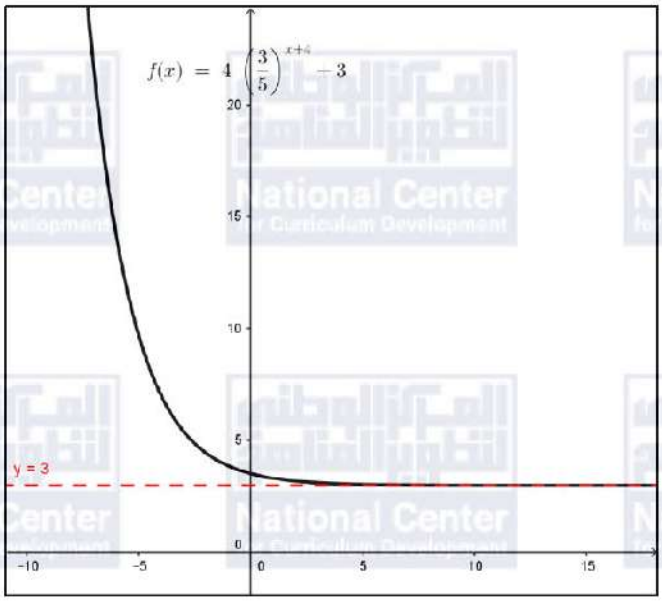
إذن بعد 60 سنة يتبقى من (السيزيوم 137) $0.25g$

	أتحقق من فهمي صفحة 159
a	$r = 2.4\% \Rightarrow r = 0.024$ $\Rightarrow 1 + r = 1.024$ $\Rightarrow A(t) = 84370(1.024)^t$
b	عام 2015 هو القيمة الابتدائية أي عند t=0 فعند عام 2050 تكون قيمة t=35 $\Rightarrow A(t) = 84370(1.024)^t$ $A(35) = 84370(1.024)^{35} \approx 193502$ فيكون عدد السكان عام 2050 تقريبا 193502 نسمة
c	
	أتحقق من فهمي صفحة 161
a	$r = 10\% \Rightarrow r = 0.1$ $\Rightarrow 1 - r = 0.9$ $\Rightarrow A(t) = 25000(0.9)^t$

b	$A(t) = 25000(0.9)^t$ $\Rightarrow A(5) = 25000(0.9)^5 = 14762.25\ JD$
c	
	أتحقق من فهمي صفحة 162
a	$P(t) = 34.706e^{0.0097t}$ عام 2015 تكون t=0 $\Rightarrow P(0) = 34.706e^0 = 34.706$
b	عام 2030 تكون t=15 $\Rightarrow P(15) = 34.706e^{0.0097\times 15}$ $= 34.706e^{0.1455}$ ≈ 40
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 163

1	 مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R المدى في الفترة $(0,\infty)$
2	 مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R المدى في الفترة $(0,\infty)$

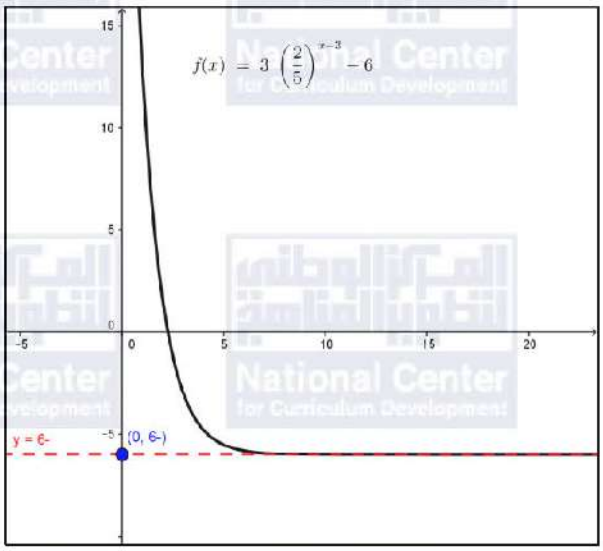
3



مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R

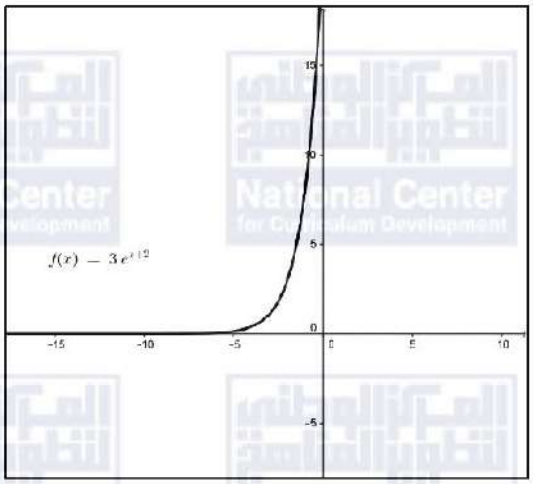
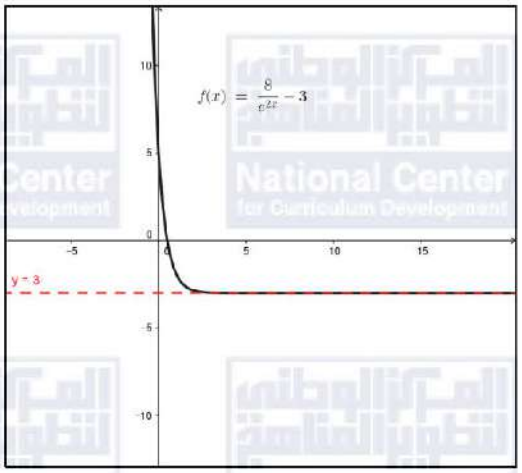
المدى في الفترة $(3,\infty)$

4



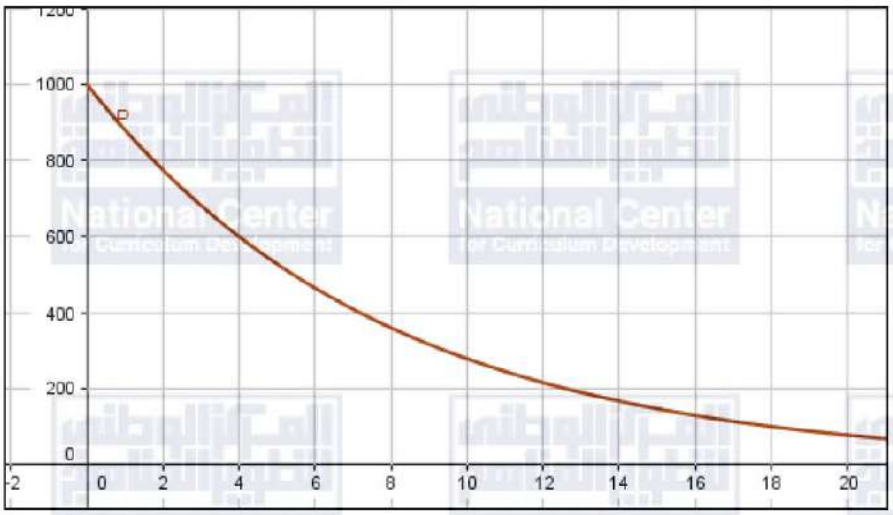
مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R

المدى في الفترة $(-6,\infty)$

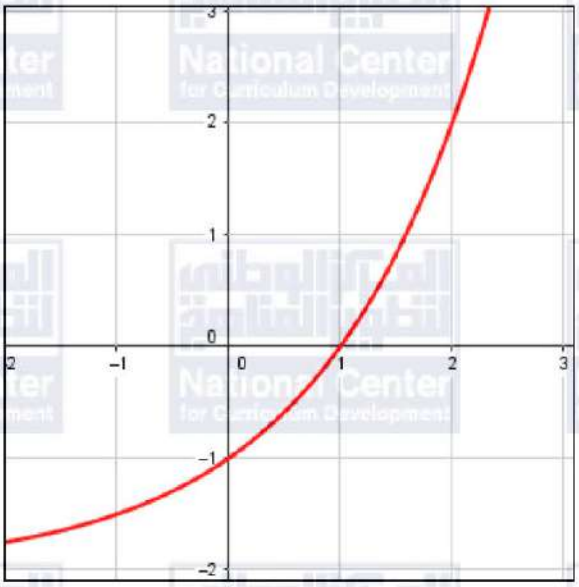
5	 مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R المدى في الفترة $(0,\infty)$
6	 مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R المدى في الفترة $(-3,\infty)$
7	 خط التقارب الافقي هو محور x

8	أجد المقطع y $f(x) = 12(2)^{\frac{x}{5}}$ $\Rightarrow f(0) = 12(2)^{\frac{0}{5}}$ $= 12 \Rightarrow y = 12$ وهذا يعني أن طول الشجرة الحالي هو 12 قدم لأن x=0 تمثل الوقت الحاضر
9	من الرسم البياني يتضح أن عدد الخلايا في البداية (عند h=0) هو a=200 خلية
10	من الرسم البياني أجد أن قيمة عدد خلايا البكتيريا A عند h=2 هو 440 خلية وهو إقتران نمو أسي إذن: $A(2) = 440$ $a = 200$ $A(h) = a(1+r)^h$ $\Rightarrow 440 = 200(1+r)^2$ بالقسمة على 200 $\Rightarrow 2.2 = (1+r)^2$ $\Rightarrow 1 + r \approx 1.48$ $\Rightarrow r \approx 0.48 = 48\%$
11	$A(h) = a(1.48)^h$
12	$a = 200 \Rightarrow 3a = 600$ من الرسم نجد قيمة h عند A=600 فيكون تقريبا 2.8 ساعة

13	$y = k(2)^x + c$ $(0,10) \Rightarrow 10 = k(2)^0 + c$ $\Rightarrow 10 = k + c \Rightarrow k = 10 - c \ldots\ldots 1$ $(-1,7) \Rightarrow 7 = k(2)^{-1} + c$ $\Rightarrow 7 = \frac{k}{2} + c$ $\Rightarrow 14 = k + 2c \ldots\ldots 2$ بتعويض المعادلة 1 في 2 $14 = 10 - c + 2c \Rightarrow c = 4$ $\Rightarrow k = 10 - 4 = 6$
14	$y = k(2)^x + c$ $k = 6\ , c = 4$ $\Rightarrow y = 6(2)^x + 4$ بتعويض x=3 $\Rightarrow y = 6(2)^3 + 4$ $\Rightarrow y = 52$
15	ثمن الدراجة عند شرائها أي عند t=0 وهو 1000JD

16	من الرسم أجد أن ثمن الدراجة عند t=2 هو P(2)=500 وبما أن الثمن عند t=0 هو a=1000 إذن: $P(t) = a(1-r)^t$ $\Rightarrow 500 = 1000(1-r)^2$ بالقسمة على 1000 $\Rightarrow 0.5 = (1-r)^2 \Rightarrow 1-r \approx 0.7$ $\Rightarrow r \approx 0.3 = 30\%$
17	$P(t) = 1000(0.7)^t$
18	عند سطح البحر تكون h=0 أي أن الضغط عند البداية يكون 1000 $P(h) = a(1-r)^h$ $P(h) = 1000(1-0.12)^h$ $P(h) = 1000(0.88)^h$
19	
20	$P(t) = 200(e)^t$ $P(3) = 200(e)^3 \approx 4017$

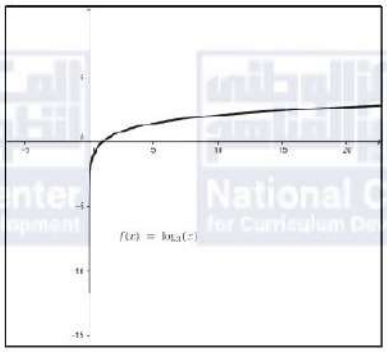
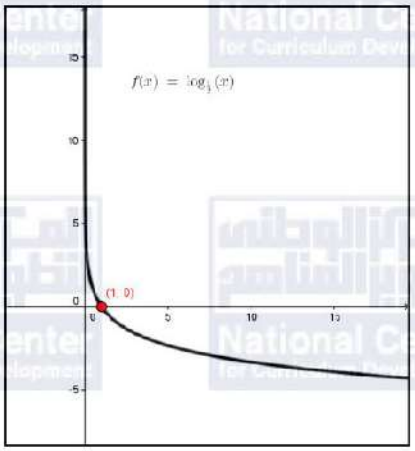
21	
22	$r = 40\% = 0.4$ $\Rightarrow 1 - r = 0.6$ $\Rightarrow M(t) = m(0.6)^t$
23	خطأ، لأن الرسم البياني ليس على شكل الإقتران الأسي حيث أن الإقتران الأسي المتزايد يكون مقعرا للأعلى وليس للأسفل

24	$P = e^{2x}$ $\Rightarrow P = (e^x)^2$ $\Rightarrow e^x = \sqrt{P} = P^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow e^{3x} = P^{\frac{3}{2}}$ $\Rightarrow e^{-2x} = P^{-1} = \frac{1}{P}$ $\Rightarrow e^{-x} = P^{-\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow e^{2x+1} = P \times e \approx 2.7P$ $\Rightarrow e^{4x} = P^2$
25	 الإقتران الأسي يقطع محور x إذا كان على صورة $f(x) = ab^x + c$ حيث $c < 0$ مثل $f(x) = 2^x - 2$ حيث يكون تمثيله البياني كما في الشكل المجاور:
26	$g(x) = \frac{1}{16}(4)^x = \frac{4^x}{4^2} = 4^{x-2} = fx)$ $\Rightarrow g(x) = f(x)$

الدرس الثاني: الاقترانات اللوغاريتمية

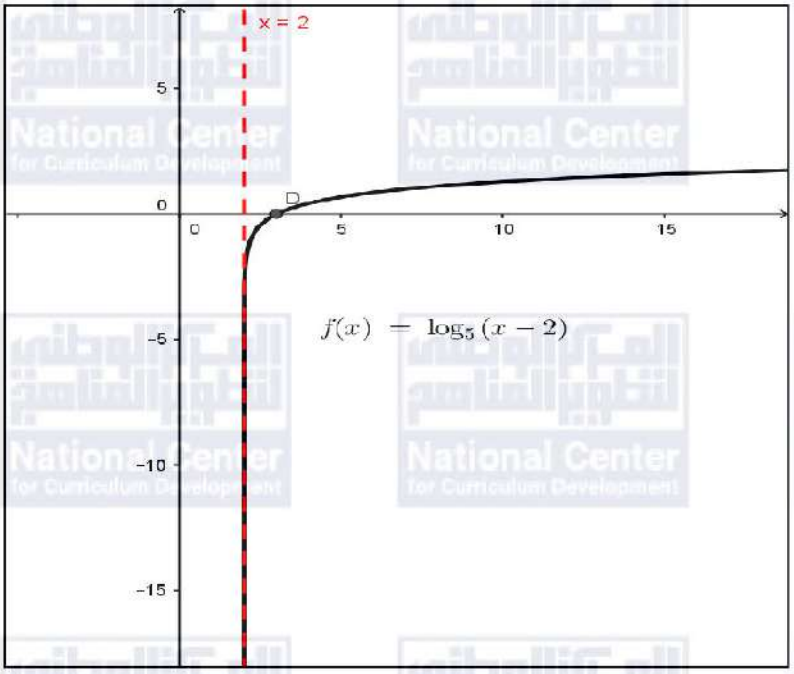
أتحقق من فهمي صفحة 166	
a	$\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 3^2 = 9$
b	$\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$
c	$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \Leftrightarrow 4^{-4} = \frac{1}{256}$
d	$\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$
أتحقق من فهمي صفحة 166	
a	$25^2 = 625 \Leftrightarrow \log_{25} 625 = 2$
b	$81^{\frac{1}{2}} = 9 \Leftrightarrow \log_{81} 9 = \frac{1}{2}$
c	$10^{-4} = \frac{1}{10000} \Leftrightarrow \log_{10} \frac{1}{10000} = -4$
d	$19^0 = 1 \Leftrightarrow \log_{19} 1 = 0$
أتحقق من فهمي صفحة 167	
a	$\log_8 64 = y \Rightarrow 8^y = 64$ $\Rightarrow 8^y = 8^2 \Rightarrow y = 2$ $\Rightarrow \log_8 64 = 2$
b	$\log_{11} \sqrt{11} = y \Rightarrow 11^y = 11^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ $\log_{11} \sqrt{11} = \frac{1}{2}$

c	$\log_{25} 5 = y$ $\Rightarrow 25^y = 5 \Rightarrow 5^{2y} = 5$ $\Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$
d	$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = y \Rightarrow 2^y = 2^{-3} \Rightarrow y = -3$
أتحقق من فهمي صفحة 168	
	$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$
b	$\log_{19} \sqrt{19} = \log_{19} 19^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
c	$\log_{18} 18 = 1$
d	$4^{\log_4 15} = 15$
أتحقق من فهمي صفحة 170	
a	$\log 1200 \approx 3.08$
b	$\log(6.3 \times 10^5) \approx 5.8$
c	$\ln 0.00025 \approx -8.29$
أتحقق من فهمي صفحة 172	

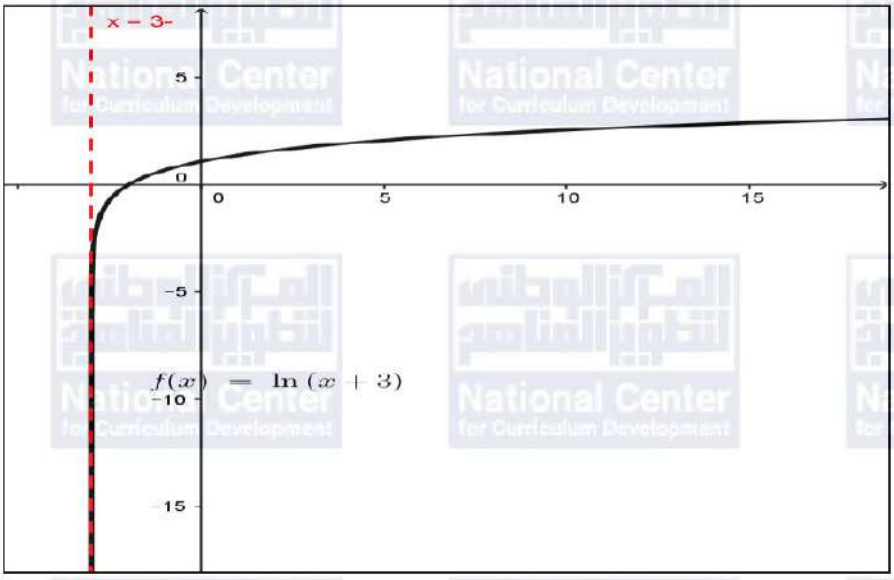
a	 المجال في الفترة $(0,\infty)$ المدى الاعداد الحقيقية R الإقتران متزايد ليس له مقطع y مقطع x هو x=1 له خط تقارب رأسي هو محور y
b	 المجال في الفترة $(0,\infty)$ المدى الاعداد الحقيقية R الإقتران متناقص ليس له مقطع y مقطع x هو x=1 له خط تقارب رأسي هو محور y

أتحقق من فهمي صفحة 174

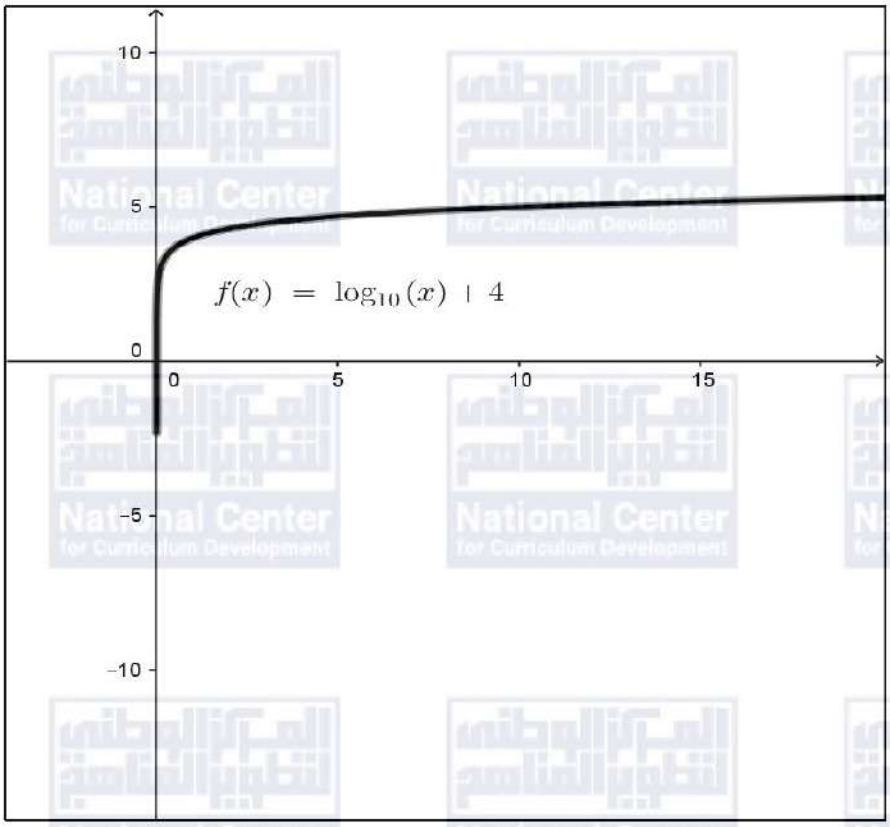
a



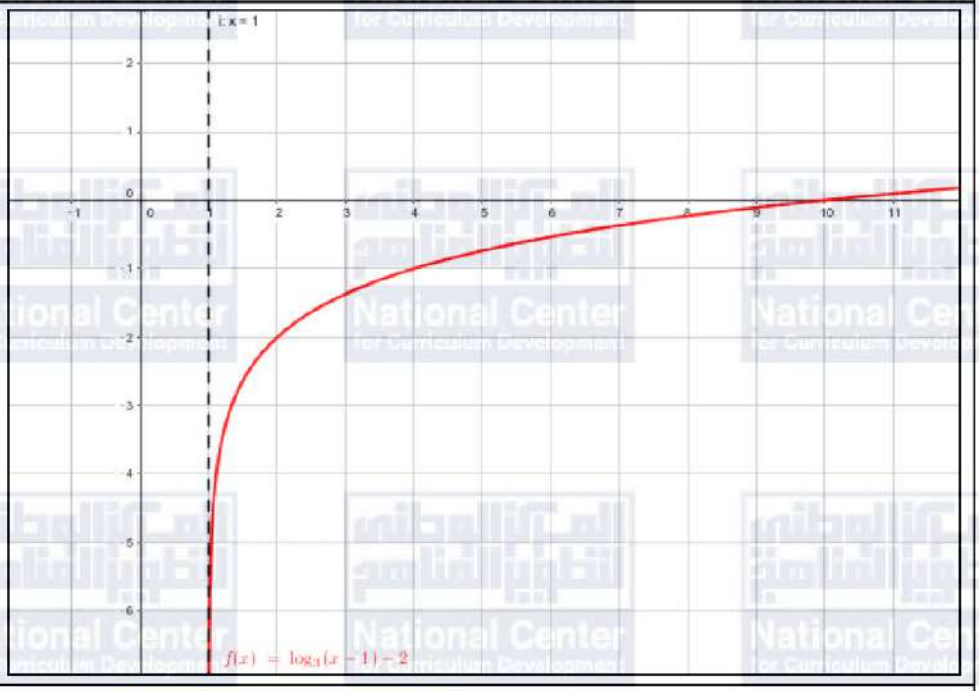
b



c

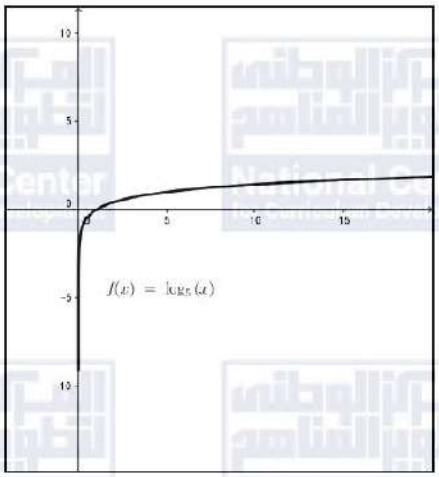


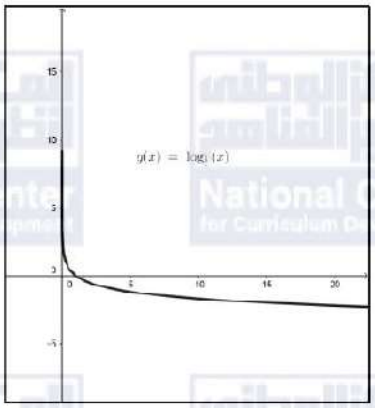
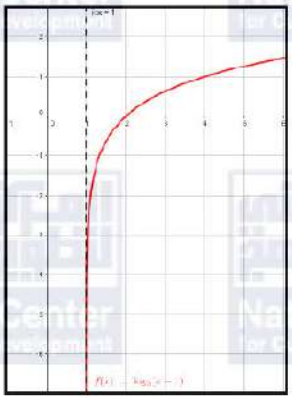
d



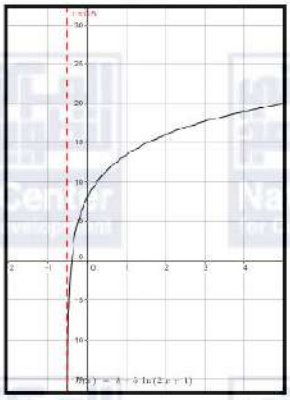
أتحقق من فهمي صفحة 175

	$p^H = -\log[H^+]$ $p^H = -\log(5.88 \times 10^{-7}) \approx 6.23$ إذن الشامبو حمضي
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 176
1	$\log_4 1025 = 5 \Leftrightarrow 4^5 = 1025$
2	$\log_3 729 = 6 \Leftrightarrow 3^6 = 729$
3	$\log_8 2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 8^{\frac{1}{3}} = 2$
4	$\log_{25} 5 = 0.5 \Leftrightarrow 25^{0.5} = 5$
5	$6^3 = 216 \Leftrightarrow \log_6 216 = 3$
6	$3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$
7	$5^4 = 625 \Leftrightarrow \log_5 625 = 4$
8	$2^{-3} = 0.125 \Leftrightarrow \log_2 0.125 = -3$
9	$\log_2 256 = \log_2 2^8 = 8$
10	$\log_9 27 = y \Rightarrow 9^y = 27$ $3^{2y} = 3^3 \Rightarrow 2y = 3$ $\Rightarrow y = \frac{3}{2}$
11	$\log 0.1 = \log 10^{-1} = -1$
12	$\log_{\frac{7}{2}} 1 = 0$
13	$e^{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

14	$\log_y \sqrt[3]{y} = \log_y y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$
15	$\log(0.1 \times 10^{-6}) = \log(10^{-1} \times 10^{-6}) = -7$
16	$6^{\log_6 2.8} = 2.8$
17	$\log \frac{1}{32} \approx -1.5$
18	$\log(2.77 \times 10^{-4}) \approx -3.6$
19	$\ln 0.000062 \approx -9.7$
20	$\ln \pi \approx 1.1$
21	 المجال في الفترة $(0,\infty)$ المدى الاعداد الحقيقية R الإقتران متزايد ليس له مقطع y مقطع x هو x=1 له خط تقارب رأسي هو محور y

22		المجال في الفترة $(0,\infty)$ المدى الاعداد الحقيقية R الإقتران متناقص ليس له مقطع y مقطع x هو x=1 له خط تقارب رأسي هو محور y
23		المجال في الفترة $(1,\infty)$ المدى الاعداد الحقيقية R الإقتران متزايد ليس له مقطع y مقطع x هو x=2 له خط تقارب رأسي هو x=1

24



المجال في الفترة (∞,-0.5)المدى الاعداد الحقيقية R

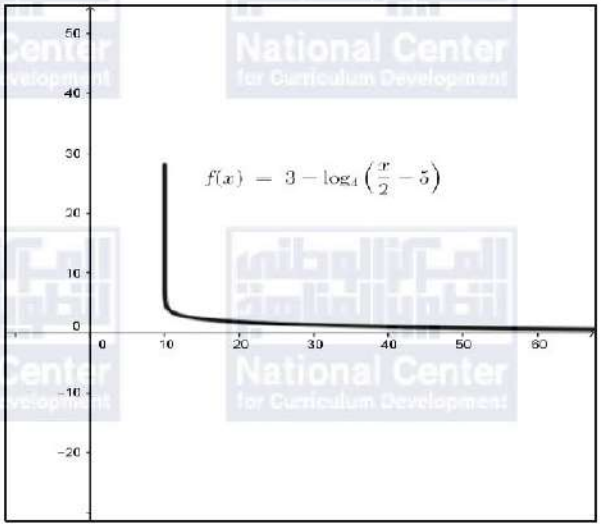
الإقتران متزايد

له مقطع y هو y=8

مقطع x هو x=-0.4

له خط تقارب رأسي هو x=-0.5

25



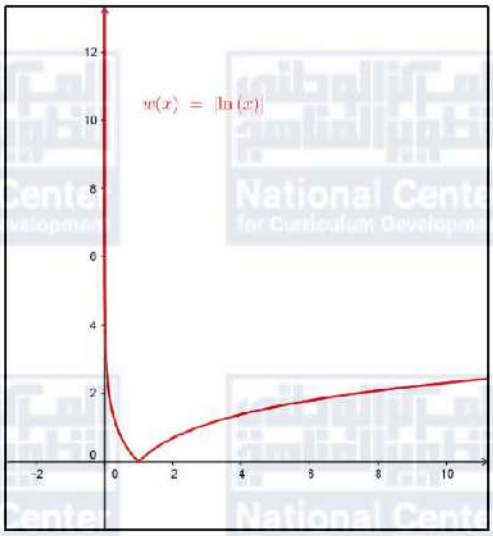
المجال في الفترة (∞,10)المدى الاعداد الحقيقية R

الإقتران متناقص

ليس له مقطع y

ليس له مقطع x

له خط تقارب رأسي هو x=10

26	 المجال في الفترة $(0,\infty)$ المدى الاعداد الحقيقية R الإقتران متناقص في الفترة $(0,1)$ ومتزايد في الفترة $(1,\infty)$ ليس له مقطع y مقطع x هو x=1 له خط تقارب رأسي هو محور y
27	$S(t) = 78 - 15\log(t+1)$ $S(0) = 78 - 15\log 1 = 78$
28	$S(t) = 78 - 15\log(t+1)$ $S(4) = 78 - 15\log(5) \approx 67.5$
29	$f(x) = \log_a x$ $2 = \log_a 2$ $a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

30	$f(x) = \log_c x$ $-4 = \log_c \frac{1}{2}$ $\Rightarrow c^{-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow c^4 = 2 \Rightarrow c = 2^{\frac{1}{4}}$
31	$A = 2 - \log 100T$ $A = 2 - \log(100 \times 0.72) \approx 0.143$
32	$A = 2 - \log 100T$ $0.174 = 2 - \log 100T$ $\log 100T = 2 - 0.174 = 1.826$ $\Rightarrow 100T = 10^{1.826} \Rightarrow T = \frac{10^{1.826}}{100} \approx 0.67$
33	التمثيل البياني له هو الرسم b لأن مجاله في الفترة $(1,\infty)$
34	التمثيل البياني له هو الرسم c لأن مقطع x هو x=3 والاقتران متزايد
35	التمثيل البياني له هو الرسم a لأن مقطع x له هو x=3 والاقتران متناقص
36	مقطع x عندما f(x)=0 $f(x) = \log(x - k)$ $0 = \log(x - k)$ $x - k = 1 \Rightarrow x = k + 1$
37	$\log_5 28 = h \Rightarrow 5^h = 28 \Rightarrow h > 2$ $\log_6 32 = y \Rightarrow 6^y = 32 \Rightarrow y < 2$ $\log_7 40 = z \Rightarrow 7^z = 40 \Rightarrow z < 2$ إذن العدد الأكبر هو $\log_5 28$

الدرس الثالث: قوانين اللوغاريتمات

أتحقق من فهمي صفحة 180	
a	$\log_b 12 = \log_b 3 \times 4 = \log_b 3 + \log_b 4$ $\approx 0.68 + 0.86 = 1.54$
b	$\log_b 9 = \log_b 3^2$ $= 2\log_b 3 \approx 2 \times 0.68 = 1.36$
c	$\log_b 0.75 = \log_b \frac{3}{4}$ $\log_b 3 - \log_b 4$ $\approx 0.68 - 0.86 = -0.18$
d	$\log_b \frac{1}{3} = \log_b 1 - \log_b 3$ $\approx 0 - 0.68 = -0.68$
أتحقق من فهمي صفحة 181	
a	$\log_3 a^2bc^3$ $= \log_3 a^2 + \log_3 b + \log_3 c^3$ $= 2\log_3 a + \log_3 b + 3\log_3 c$
b	$\ln a^2\sqrt{a-1} = \ln a^2 + \ln(a-1)^{\frac{1}{2}}$ $= 2\ln a + \frac{1}{2}\ln(a-1)$
c	$\log\left(\frac{x^2-1}{x^3}\right) = \log(x^2-1) - \log x^3$ $= \log(x^2-1) - 3\log x$

d	$\log_b\left(\frac{x^2y}{b^3}\right) = \log_b x^2 + \log_b y - \log_b b^3$ $= 2\log_b x + \log_b y - 3$

أتحقق من فهمي صفحة 183

a	$\ln 25 + \ln 4 = \ln 25 \times 4 = \ln 100 = 2\ln 10$
b	$\ln(3x+1) - \ln(3x^2 - 5x - 2)$ $= \ln\left(\frac{3x+1}{3x^2 - 5x - 2}\right)$ $= \ln\left(\frac{3x+1}{(3x+1)(x-2)}\right)$ $= \ln\left(\frac{1}{x-2}\right) = \ln 1 - \ln(x-2)$ $= -\ln(x-2)$
c	$\frac{1}{2}(\log_2(a^2+ab) - \log_2 a)$ $= \frac{1}{2}(\log_2 a(a+b) - \log_2 a)$ $= \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2(a+b) - \log_2 a) = \frac{1}{2}\log_2(a+b)$
d	$\frac{1}{3}(\log_2 x + \log_2(x-4))$ $= \frac{1}{3}(\log_2 x(x-4))$ $\log_2(x^2-4x)^{\frac{1}{3}}$ $= \log_2 \sqrt[x]{x^2-4x}$

أتحقق من فهمي صفحة 184

a	$\log_2 89 = \frac{\log 89}{\log 2} \approx 6.48$
b	$\log_5 19 = \frac{\ln 19}{\ln 5} \approx 1.83$
c	$\log_{\frac{1}{2}} 12 = \frac{\ln 12}{\ln \frac{1}{2}} \approx -3.58$
d	$\log_8 e^2 = \frac{\ln e^2}{\ln 8} \approx \frac{2}{2.08} \approx 0.96$

أتحقق من فهمي صفحة 188

a	$5^x = 8$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين $\log 5^x = \log 8 \Rightarrow x \log 5 = \log 8$ $\Rightarrow x = \frac{\log 8}{\log 5} \approx 1.2920$
b	$4e^{2x} - 3 = 2$ $4e^{2x} = 5$ $e^{2x} = \frac{5}{4}$ $\ln e^{2x} = \ln 1.25$ $2x \approx 0.2231$ $x \approx 0.1116$

c	$2^{x-1} = 3^{3x+2}$ $2^x \times 2^{-1} = 3^{3x} \times 3^2$ $\frac{2^x}{2} = 27^x \times 9$ $\left(\frac{2}{27}\right)^x = 18$ $x \log\left(\frac{2}{27}\right) = \log 18$ $x = \frac{\log 18}{\log\left(\frac{2}{27}\right)} \approx -1.8128$	
d	$9^x + 3^x - 20 = 0$ $y^2 + y - 20 = 0$ $(y+5)(y-4) = 0$ $y = -5 \Rightarrow 3^x = -5$ مرفوض أو $y = 4 \Rightarrow 3^x = 4 \Rightarrow \log_3 4 = x$ $\Rightarrow x \approx 1.2619$	بفرض $y = 3^x$

أتحقق من فهمي صفحة 189

a	$5 + 2\ln x = 4$ $\ln x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = e^{-1}$ $\Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$	

b	$\log_5(x+6)+\log_5(x+2)=1$ $\log_5(x+6)(x+2)=1$ $x^2+8x+12=5^1$ $x^2+8x+7=0$ $(x+1)(x+7)=0$ $x=-7$ مرفوض $or\ x=-1$

أتحقق من فهمي صفحة 190

	$A(p)=\dfrac{\ln p}{-0.000121}$ $4000=\dfrac{\ln p}{-0.000121}$ $\ln p=-0.484$ $p=e^{-0.484}\approx 0.62=62\%$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 190

1	$\log_a\dfrac{7}{11}=\log_a 7-\log_a 11\approx -0.196$
2	$\log_a 77=\log_a 7\times 11=\log_a 7+\log_a 11\approx 1.886$
3	$\dfrac{\log_a 11}{\log_a 7}\approx 1.232$
4	$\log_a\dfrac{1}{7}=\log_a 1-\log_a 7\approx 0-0.845=-0.845$
5	$\log_a 539=\log_a 7^2\times 11=2\log_a 7+\log_a 11\approx 2.731$

6	$\log_7 11 = \dfrac{\log_a 11}{\log_a 7} \approx 1.232$
7	$\log_a 11a^2 = \log_a 11 + 2\log_a a \approx 3.041$
8	$\log_a \sqrt[3]{121} = \log_a 11^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}\log_a 11 \approx 0.694$
9	$\log_a \left(\dfrac{xy}{z}\right) = \log_a x + \log_a y - \log_a z$
10	$\log_a (xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z$
11	$\ln \sqrt[3]{5x^2} = \ln 5^{\frac{1}{3}} + \ln x^{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3}\ln 5 + \dfrac{2}{3}\ln x \approx 0.536 + \dfrac{2}{3}\ln x$
12	$\log \sqrt{\dfrac{m^8 n^{12}}{a^3 b^5}} = \log \dfrac{m^4 n^6}{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{5}{2}}}$ $= 4\log m + 6\log n - \dfrac{3}{2}\log a - \dfrac{5}{2}\log b$
13	$\ln 75 + \ln 2 = \ln 150$
14	$\log x + \log(x^2 - 1) - \log 7 - \log(x + 1)$ $= \log\left(\dfrac{x(x^2-1)}{7(x+1)}\right) = \log\left(\dfrac{x(x+1)(x-1)}{7(x+1)}\right)$ $= \log\left(\dfrac{x(x-1)}{7}\right) = \log\left(\dfrac{x^2 - x}{7}\right)$

15	$\log_a \frac{a}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{ax}$ $= \log_a a - \log_a x^{\frac{1}{2}} - \log_a a^{\frac{1}{2}} - \log_a x^{\frac{1}{2}}$ $= 1 - 2\log_a x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$ $= 1 - \log_a x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \log_a x$
16	$\frac{2}{3}(\ln(x^2-9) - \ln(x+3) + \ln(x+y))$ $= \frac{2}{3}(\ln(x-3) + \ln(x+3) - \ln(x+3) + \ln(x+y))$ $= \frac{2}{3}(\ln(x-3) + \ln(x+y))$ $= \ln \sqrt[3]{(x^2-3x-3y+xy)^2}$
17	$\log_4 17 = \frac{\log 17}{\log 4} \approx 2.0437$
18	$\log_4 \frac{1}{100} = \frac{\ln 0.01}{\ln 4} \approx -3.3219$
19	$\log_9 0.0006 = \frac{\log 0.0006}{\log 9} \approx -3.3763$
20	$\log_8 120 = \frac{\log 120}{\log 8} \approx 2.3022$

21	$H = 15500(5 - \log p)$ $8850 = 15500(5 - \log p)$ $0.57 = 5 - \log p$ $\log p = 5 - 0.57$ $\log p = 4.43 \Rightarrow p = 10^{4.43} \approx 26915.35$
22	$5^{x+2} = 4^{1-x}$ $\Rightarrow 5^x \times 5^2 = \frac{4^1}{4^x}$ $\Rightarrow 5^x \times 4^x \times 25 = 4$ $\Rightarrow 20^x = \frac{4}{25}$ $\Rightarrow \ln 20^x = \ln 0.16$ $\Rightarrow x = \frac{\ln 0.16}{\ln 20} \approx -0.6117$

23	$e^x + e^{-x} - 6 = 0$ بالضرب في e^x $e^{2x} + 1 - 6e^x = 0$ بفرض $y = e^x$ $y^2 - 6y + 1 = 0$ $y = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$ $y = 3 \pm 2\sqrt{2}$ $e^x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \ln(3 + 2\sqrt{2}) \approx 1.7627$ أو $e^x = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \ln(3 - 2\sqrt{2}) \approx -1.7627$
24	$3^{x^2+4x} = \frac{1}{27}$ $\Rightarrow 3^{x^2+4x} = 3^{-3}$ $\Rightarrow x^2 + 4x = -3$ $\Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$ $(x + 1)(x + 3) = 0$ $\Rightarrow x = -1 \ or \ x = -3$

25	$25^x - 3(5^x) + 2 = 0$ $\Rightarrow 5^{2x} - 3(5^x) + 2 = 0$ $\Rightarrow (5^x - 2)(5^x - 1) = 0$ $5^x = 2 \Rightarrow \log_5 2 = x$ $\Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 5} \approx 0.4307$ أو $5^x = 1 \Rightarrow x = 0$
26	$\log(x+5) - \log(x-3) = \log 2$ $\log\left(\frac{x+5}{x-3}\right) = \log 2$ $\frac{x+5}{x-3} = 2$ $x + 5 = 2x - 6 \Rightarrow x = 11$
27	$\ln(x+8) + \ln(x-1) = 2\ln x$ $\ln(x+8)(x-1) = \ln x^2$ $(x+8)(x-1) = x^2$ $x^2 + 7x - 8 = x^2 \Rightarrow 7x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{7}$
28	$\log_3(\log_4 x) = 0 \Rightarrow \log_4 x = 3^0$ $\Rightarrow \log_4 x = 1 \Rightarrow x = 1$

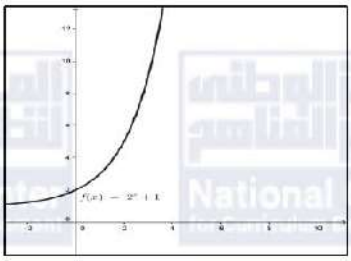
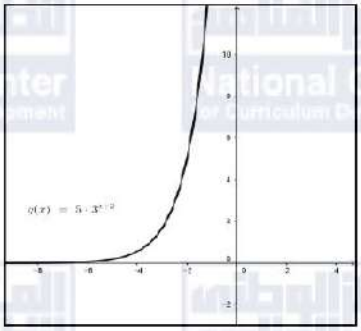
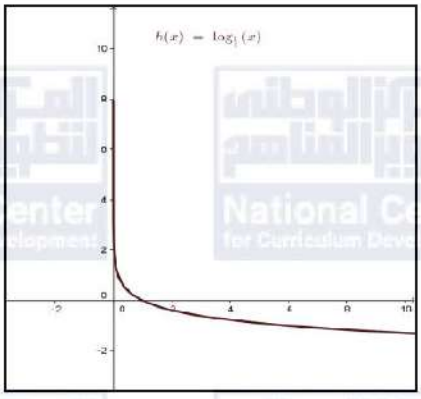
29	$\ln x^2 = (\ln x)^2$ $2\ln x - (\ln x)^2 = 0$ $\ln x\,(2 - \ln x) = 0$ $\Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$ أو $\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$
30	$2\log 50 = 3\log 25 + \log(x-2)$ $2(\log 5 + \log 10) = 3\log 5^2 + \log(x-2)$ $2\log 5 + 2 = 6\log 5 + \log(x-2)$ $2 = 4\log 5 + \log(x-2)$ $\log(x-2)\,(5^4) = 2$ $(x-2)(625) = 10^2$ $625x - 1250 = 100 \Rightarrow x = \frac{1350}{625} = 2.16$
31	$T = 27 + 219e^{-0.032t}$ $100 = 27 + 219e^{-0.032t}$ $73 = 219e^{-0.032t}$ $\frac{1}{3} = e^{-0.032t} \Rightarrow \ln\frac{1}{3} = -0.032t \Rightarrow t = \frac{\ln\frac{1}{3}}{-0.032} \approx 34.332$

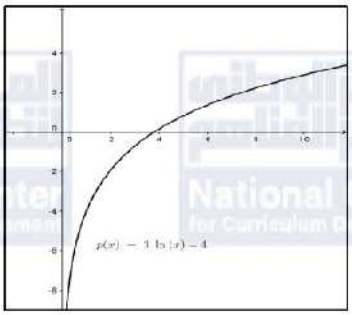
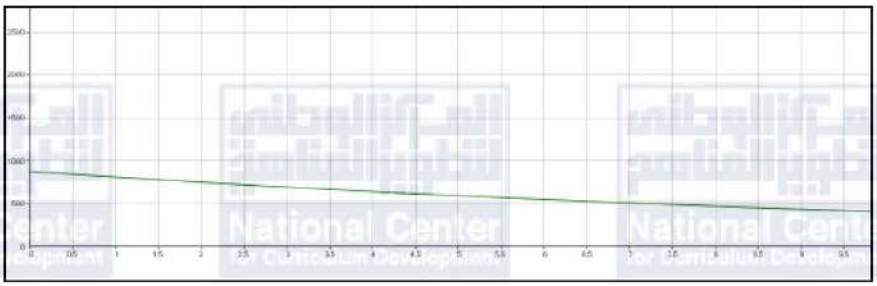
32	$7e^{3k} - 7e^{-3k} - 48 = 0$ بالضرب في e^{3k} $7e^{6k} - 7 - 48e^{3k} = 0$ بفرض $y = e^{3k}$ $7y^2 - 48y - 7 = 0$ $y = \frac{48 \pm \sqrt{2108}}{14}$ $e^{3k} = \frac{48 + \sqrt{2108}}{14} \Rightarrow e^{3k} \approx 6.7 \Rightarrow 3k = \ln 6.7 \Rightarrow k \approx 0.634$ أو $e^{3k} = \frac{48 - \sqrt{2108}}{14} \Rightarrow e^{3k} \approx 0.15 \Rightarrow 3k = \ln 0.15 \Rightarrow k \approx -0.634$
33	$\lvert 2^{x^2} - 8 \rvert = 3$ $2^{x^2} - 8 = 3 \quad or \quad 2^{x^2} - 8 = -3$ $2^{x^2} - 8 = 3 \Rightarrow 2^{x^2} = 11 \Rightarrow x^2 \log 2 = \log 11 \Rightarrow x^2 \approx 3.459 \Rightarrow x \approx 1.86$ or $2^{x^2} - 8 = -3 \Rightarrow 2^{x^2} = 5 \Rightarrow x^2 \log 2 = \log 5 \Rightarrow x^2 \approx 2.322 \Rightarrow x \approx 1.52$
34	$\log_3 x = k \log_2 x$ $\frac{\log x}{\log 3} = k \frac{\log x}{\log 2}$ $\Rightarrow k = \left(\frac{\log x}{\log 3}\right)\left(\frac{\log 2}{\log x}\right) \Rightarrow k = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309$

اختبار نهاية الوحدة الرابعة

1	a
2	b
3	a
4	b
5	d
6	$\log_3 15 = \log_3 5 + \log_3 3 = c + 1$
7	$\log_3 0.2 = \log_3 \frac{1}{5} = \log_3 1 - \log_3 5 = -c$
8	$\log_3 125 = \log_3 5^3 = 3c$
9	$\log_9 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 9} = \frac{c}{2}$
10	$\frac{1}{4}\log_3(x-3) = \log_3 6$ $\log_3(x-3)^{\frac{1}{4}} = \log_3 6$ $\Rightarrow (x-3)^{\frac{1}{4}} = 6$ $\Rightarrow x - 3 = 1296 \Rightarrow x = 1299$
11	$\log_4(x+3) + \log_4(x-3) = 2$ $\Rightarrow \log_4(x+3)(x-3) = 2$ $\Rightarrow x^2 - 9 = 4^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

12	$e^x + e^{-x} = 5 \Rightarrow e^{2x} + 1 = 5e^x$ بفرض $y = e^x$ $\Rightarrow y^2 - 5y + 1 = 0$ $\Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ $\Rightarrow y \approx 4.791$ أو $y \approx 0.209$ $\Rightarrow e^x = 4.791 \Rightarrow x = \ln 4.791 \approx 1.57$ أو $\Rightarrow e^x = 0.209 \Rightarrow x = \ln 0.209 \approx -1.57$
13	$27 = 9^{x^2} \times 3^{5x}$ $3^3 = 3^{2x^2} \times 3^{5x}$ $\Rightarrow 2x^2 + 5x = 3$ $(2x - 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad or\ x = -3$
14	$T = 18 + 12e^{0.002t}$ $T = 18 + 12e^{0.002 \times 5}$ $T \approx 30.121$
15	$T = 18 + 12e^{0.002t}$ $50 = 18 + 12e^{0.002t}$ $32 = 12e^{0.002t} \Rightarrow e^{0.002t} \approx 2.7$ $\Rightarrow e^{0.002t} = e \Rightarrow t = \frac{1}{0.002} = 500$

16		المجال الاعداد الحقيقية R المدى $(1,\infty)$
17		المجالالأعداد الحقيقية R المدى $(0,\infty)$
18		المجال $(0,\infty)$ المدى الأعداد الحقيقية R

19	 المجال $(0,\infty)$ المدى الأعداد الحقيقية R
20	$L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ $L = 10\log\left(\frac{5500\,I_0}{I_0}\right)$ $L = 10\log 5500 \approx 37.404$
21	$L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ $32 = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ $3.2 = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow 10^{3.2} = \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = 10^{3.2} I_0$
22	
23	$N = 873e^{-0.078t}$ $N = 873e^{-0.078\times 10} \approx 400$

24	$\log_a \sqrt{xyz} = \frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y + \log_a z)$
25	$\ln\left(\frac{2}{3x^3y}\right) = \ln 2 - \ln 3 - 3\ln x - \ln y$
26	$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$
27	$\log_a x\sqrt{y} = \log_a x + \frac{1}{2}\log_a y$
28	$2\log x - \log(x+1) = \log\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$
29	$\log(x^2-5x-14) - \log(x^2-4)$ $= \log\left(\frac{x^2-5x-14}{x^2-4}\right)$ $= \log\left(\frac{(x-7)(x+2)}{(x-2)(x+2)}\right) = \log\left(\frac{x-7}{x-2}\right)$
30	$4\log_b x - 2\log_b 6 - \frac{1}{2}\log_b y$ $= \log_b x^4 - \log_b 36 - \log_b \sqrt{y}$ $\log_b\left(\frac{x^4}{36\sqrt{y}}\right)$
31	b
32	a
33	c